

Время выполнения задания 120 минут

1. Решите неравенство $\left| \frac{2x-5}{x-2} \right| \geq 3$.

Ответ: $[1; 2) \cup (2; 2,2]$

2. Вычислите сумму $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 101}$.

Ответ: $33/202$

3. Найдите основной период функции $f(x) = 2 \sin\left(2,5x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos\left(\frac{5x + \pi}{3}\right)$.

Ответ: $2,4\pi$

4. На затонувшей каравелле XIV века были найдены шесть мешков с золотыми монетами. В первых четырех мешках оказалось 60, 30, 20 и 15 золотых монет. Когда подсчитали монеты в оставшихся двух, кто-то заметил, что число монет в мешках составляет некую последовательность. Приняв это к сведению, смогли бы вы сказать, сколько монет в пятом и шестом мешках?

Ответ: 12 и 10

5. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник на шесть частей, три из которых являются треугольниками, площади которых равны 8, 18 и 32. Найти площадь данного треугольника.

Ответ: 162

6. Профессор и студент живут в одном доме и ходят пешком в один институт. Студент добирается до места за 20 минут, а профессор – за 30 минут. Через сколько минут студент догонит профессора, если тот выйдет из дома на 5 минут раньше студента?

Ответ: 10 мин

7. Найти функцию $f(x)$, если известно, что при всех допустимых значениях x она удовлетворяет условию $2f(x) + f\left(\frac{-3x-1}{3x+3}\right) = 3x-3$

Ответ: $f(x) = \frac{6x^2 + 6x - 2}{3x + 3}$

Важно! После каждой задачи запишите краткий ответ в отведенном поле. Полное развернутое решение запишите на следующих листах, указав номер задачи. Задание считается выполненным только при условии, что имеется как краткий ответ, так и полное развернутое решение.

$$1) \left| \frac{2x-5}{x-2} \right| \geq 3 \quad \text{ODZ} \quad x \neq 2$$

$$\begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} \geq 3 \\ \frac{2x-5}{x-2} \leq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} - 3 \geq 0 \\ \frac{2x-5}{x-2} + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-x+3}{x-2} \geq 0 \\ \frac{5x-5}{x-2} \leq 0 \end{cases}$$

$x \in [1, 2) \cup [2, \frac{11}{5}]$

$$x \in [1, 2) \cup [2, \frac{11}{5}]$$

$$2) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 101}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \frac{3}{n(n+3)}$$

$$\frac{1}{n \cdot (n+3)} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}}{3}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{3}$$

$$\frac{1}{5 \cdot 8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{8}}{3} \quad \dots \quad \frac{1}{98 \cdot 101} = \frac{\frac{1}{98} - \frac{1}{101}}{3}$$

$$\begin{aligned}
 2) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 101} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{101} = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{101} = \frac{99}{2 \cdot 101} = \frac{99}{202}
 \end{aligned}$$

3) $f(x) = g(x) + h(x)$

основным периодом $g(x)$ является T_1 .

основным периодом $h(x)$ является T_2 .

$$T_1 \cdot n = T_2 \cdot k = T_3 \cdot p, \quad k \in \mathbb{N}; \quad n, k \rightarrow \min \quad (1)$$

то основным периодом $f(x)$ является $T_3 = T_1 \cdot n = T_2 \cdot k$

$$f(x) = k_1 g(k_1 x) + k_2 h(k_2 x) \quad (2)$$

основным периодом $f(x)$ является T_1 , то основным периодом $g(x)$ является $\frac{T_1}{k}$.

$$f(x) = 2 \sin\left(2.5x - \frac{\sqrt{c}}{3}\right) + 3 \cos\left(\frac{5x + \sqrt{c}}{3}\right)$$

$$g(x) = 2 \sin\left(2.5x - \frac{\sqrt{c}}{3}\right) \quad h(x) = 3 \cos\left(\frac{5x + \sqrt{c}}{3}\right)$$

основной период $\sin(kx)$ $\frac{2\pi}{k}$

основной период $\cos(kx)$ $\frac{2\pi}{k}$

то основной период $g(x) = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} \quad (2)$

основной период $h(x) = \frac{2\pi}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{6\pi}{5}$ минимальные n и k из (1) 3 и 2 , то есть $T_3 = \frac{12\pi}{5}$
 $(6 \cdot 2) = 12$

3) основной период $f(x) = \frac{12\sqrt{e}}{5} = 2,4\sqrt{e}$

4) $a_1 = 60$ $a_2 = 30$ $a_3 = 20$ $a_4 = 15$

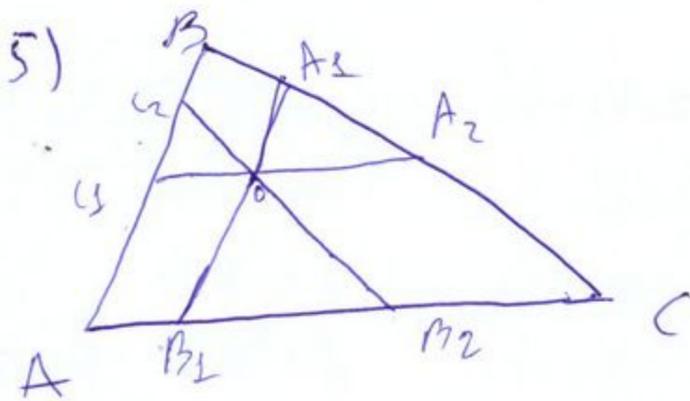
$a_1 = 60 : 1$

$a_2 = 60 : 2$

$a_3 = 60 : 3$

$a_4 = 60 : 4$

то есть $a_i = 60 : i \Rightarrow a_5 = 60 : 5 = 12$ $a_6 = 60 : 6 = 10$



$S_{C_1C_2O} = 8$

$S_{OA_1A_2} = 18$

$S_{OB_1B_2} = 32$

$C_1C_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB$

$B_1B_2 \parallel C_1A_2 \parallel AC$

$A_1A_2 \parallel C_2B_2 \parallel CB$

$\Rightarrow \begin{cases} \angle C_2C_1O = \angle A_1OA_2 = \angle OB_1B_2 = \angle A \\ \angle C_1C_2O = \angle OA_1A_2 = \angle B_1OB_2 = \angle B \\ \angle C_2OC_1 = \angle A_1A_2O = \angle OB_2B_1 = \angle C \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta C_1C_2O \sim \Delta A_1A_2O \sim \Delta B_1OB_2 \sim \Delta ABC$

$\frac{S_{C_1C_2O}}{S_{A_1A_2O}} = k_{CA}^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow k_{CA} = \frac{2}{3}$

$\frac{S_{C_1C_2O}}{S_{B_1B_2O}} = k_{CB}^2 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow k_{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{S_{B_1B_2O}}{S_{A_1A_2O}} = k_{BA}^2 = \frac{32}{18} = \frac{16}{9} \Rightarrow k_{BA} = \frac{4}{3}$

$C_1C_2 : A_1O : OB_1 = 1 : 1,5 : 2$

$C_1O : B_1O$

$A_1OC_2B_1$ и A_1OB_1 явл.

паралелограммами, то

$A_1O = C_1B_1$

$AC_1 = B_1O$

$C_1C_2 : B_2C_2 : AC_1 = 1 : 1,5 : 2 \Rightarrow C_1C_2 : AB = 1 : 2$

5) то есть $S_{C_1C_2O} : S_{ABC} = 1 : 4,5$ $k_c = \frac{2}{9}$

$$\frac{S_{C_1C_2O}}{S_{ABC}} = k_c^2 = \frac{4}{81}$$

$$S_{ABC} = \frac{81}{4} \cdot S_{C_1C_2O} = \frac{81}{4} \cdot 8 = 162$$

6) $t_1 = 30$ мин

$t_2 = 20$ мин

$\Delta t = 5$ мин

$t_1 = ?$

$$\frac{S}{v_1} = 30$$

$$\frac{S}{v_2} = 20$$

$$v_1 = \frac{S}{30}$$

$$v_2 = \frac{S}{20}$$

$$v_1(t+5) = v_2 \cdot t$$

$$\frac{S(t+5)}{t_1} = \frac{S}{t_2} \cdot t$$

$$\frac{t+5}{t} = \frac{t_1}{t_2}$$

$$1 + \frac{5}{t} = 1,5$$

$$\frac{5}{t} = 0,5 \quad t = 10 \text{ мин}$$

$$7) 2f(x) + f\left(\frac{-3x-1}{3x+3}\right) = 3x-3$$

$$y = \frac{-3x-1}{3x+3}$$

$$\frac{-3x-1}{3x+3} = t$$

$$3xy + 3y = -3x - 1$$

$$3y + 1 = -3x(y+1)$$

$$x = \frac{-1-3y}{3y+3}$$

$$2f\left(\frac{-1-3y}{3y+3}\right) + f(y) = 3 \cdot \frac{-1-3y}{3y+3} - 3$$

$$2f\left(\frac{-1-3x}{3x+3}\right) + f(x) = \frac{-1-3x}{x+1} - 3$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{-1}{x}\right) + 2f(x) = 3x-3 \\ 2f\left(\frac{-1}{x}\right) + f(x) = \frac{-4-6x}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2f\left(\frac{-1}{x}\right) + 4f(x) = 6x-6 \\ 2f\left(\frac{-1}{x}\right) + f(x) = \frac{-4-6x}{x+1} \end{cases}$$

$$3f(x) = 6x-6 - \frac{-4-6x}{x+1}$$

$$f(x) = 2x-2 + \frac{4+6x}{3x+3} = \frac{6x^2+6x-2}{3x+3}$$