Международная олимпиада молодежи – 2014/15

Математика

11 класс

Время выполнения задания 120 минут

1. Найдите наименьшее значение функции $y=(x+1)(x+2)(x+5)(x+6)$.

Ответ: -4

2. Саша и Маша живут в одном доме и ходят пешком в одну школу. Саша добирается до школы за 10 минут, а Маша – за 15 минут. Через сколько минут Саша догонит Машу, если она выйдет из дома на 2 минуты раньше Саши?

Ответ: 4

3. Найдите последнюю цифру числа $7\cdot 2^{2014}+3^{2014}$.

Ответ: 7.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC\|AD$) пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны соответственно 5 и 125. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 180

5. Дан угол $\angle ASB=30^\circ$ с вершиной S. Точка M расположена внутри угла на расстоянии 2 и 3 от его сторон. В данный угол вписать треугольник MNK наименьшего периметра, так чтобы вершины N и K лежали на различных сторонах данного угла. Чему равен периметр такого треугольника?

Ответ: $2\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

6. Решите уравнение $12\sin^3 x+16\sin^2 x-5\sin x-3=0$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$; $x=\alpha+2k\pi$; $x=\beta+2k\pi$, where $\alpha\neq\beta$, $0<\alpha,\beta<2\pi$, $\sin\alpha=\sin\beta=-\frac{1}{3}$ and $k\in\mathbb{Z}$

7. Найдите все значения параметра p, при которых функция $f(x)=3\sqrt{192+16x-x^2}-4\sqrt{96-4x-x^2}-2\sqrt{x^2-64}+px$ является четной.

Ответ: -5

<u>Важно!</u> После каждой задачи запишите краткий ответ в отведенном поле. Полное развернутое решение запишите на следующих листах, указав номер задачи. Задание считается выполненным только при условии, что имеется как краткий ответ, так и полное развернутое решение.

1. $y=(x+1)(x+2)(x+5)(x+6)=((x+1)(x+6))((x+2)(x+5))=(x^2+7x+6)(x^2+7x+$

Let $x^2+7x+8=t$. Then $x^2+7x+6=t-2$, $x^2+7x+10=t+2$

Then $y=(t-2)(t+2)=t^2-4\geq -4$.

$\Rightarrow$ The smallest value of y is $\boxed{-4}$ and it is achieved for $x^2+7x+8=0$, $\boxed{x=\frac{-7\pm\sqrt{17}}{2}}$

+

2. Let the distance between the school and their house is S km

Sasha walks at speed $\frac{S}{10}$ km/min, and Masha walks at speed $\frac{S}{15}$ km/min.

~~Pro~~ ~~Mas~~ Let Sasha overtakes Masha x minutes after he started walking. we get the equation

$(x+2)\cdot\frac{S}{15}=x\cdot\frac{S}{10} \quad | \cdot\frac{1}{S}$

$\frac{x+2}{15}=\frac{x}{10} \quad | \cdot 150$

$10(x+2)=15x$

$10x+20=15x$

$5x=20$

$\boxed{x=4 \text{ minutes}}$

+

3. $2^1\equiv 2\ (10)$, $2^2\equiv 4\ (10)$, $2^3\equiv 8\ (10)$, $2^4\equiv 6\ (10)$

$2^5\equiv 2^1\equiv 2\ (10)$. By induction we get $(k,l\in\mathbb{N})$

$2^{4k+l}\equiv 2^l\ (10)$. As $2014=4\cdot 503+2$,

$2^{2014}\equiv 2^2\equiv 4\ (10)$.

+

$3^1 \equiv 3(10)$, $3^2 \equiv 9(10)$, $3^3 \equiv 7(10)$, $3^4 \equiv 1(10)$

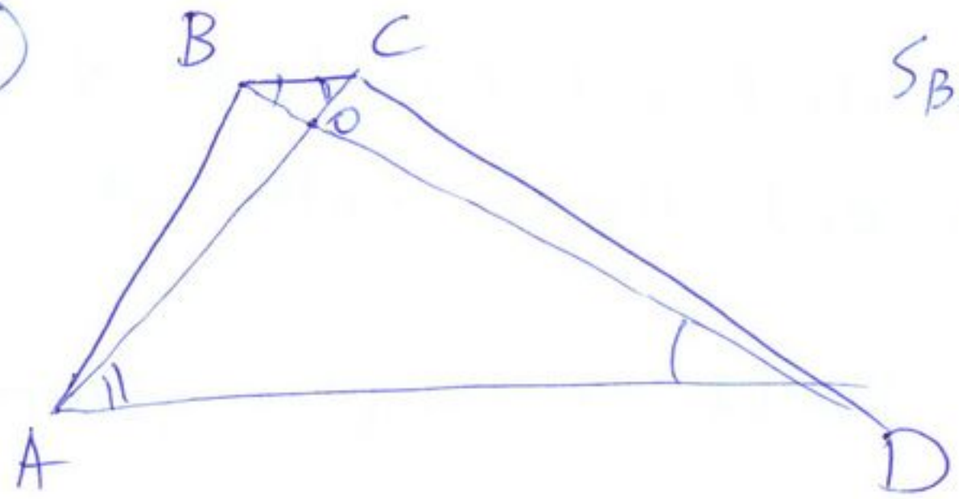
so again by induction $3^{4k+l} \equiv 3^l (10)$ where k and l are natural numbers.

So $3^{2014} \equiv 3^2 \equiv 9(10)$.

$7.2^{2014} + 3^{2014} \equiv 7.2^2 + 3^2 \equiv 7.4 + 9 = 28 + 9 = 37 \equiv 7(10)$.

The last digit of the number $7.2^{2014} + 3^{2014}$ is 7.

(4.)



$S_{BOC} = 5$, $S_{AOD} = 125$

$\measuredangle ADO = \measuredangle CBO$

$\measuredangle OAD = \measuredangle OCB$

$\Rightarrow \triangle ODA \sim \triangle OBC$

$\Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{OA}{OC}$

$$25 = \frac{125}{5} = \frac{S_{AOD}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} \cdot \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{OD}{OB} \cdot \frac{OA}{OC} = \left(\frac{OA}{OC}\right)^2$$

$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = 5 = \frac{OD}{OB}$

$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{AO}{OC} = 5 \Rightarrow S_{AOB} = 5.S_{BOC} = 5.5 = 25$

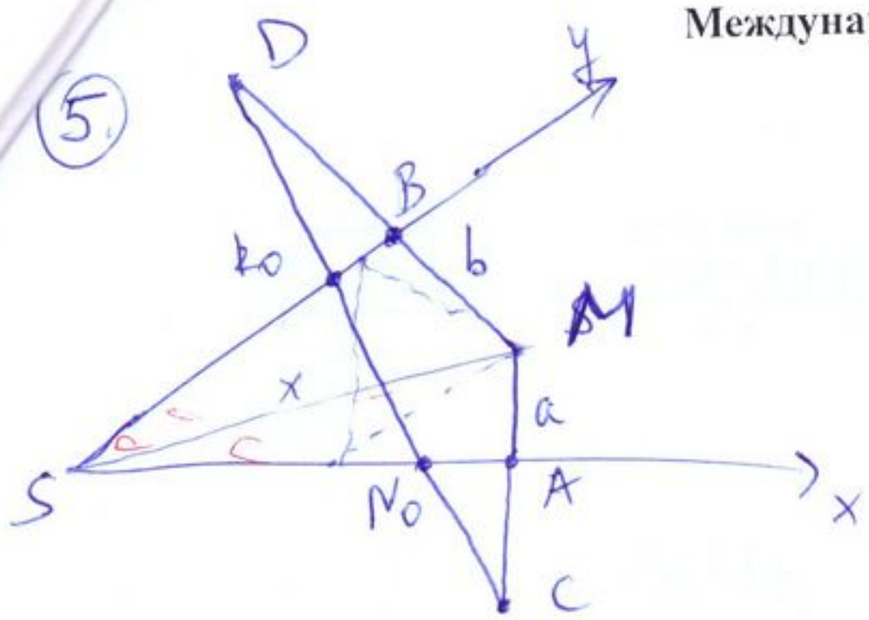
and $\frac{S_{COD}}{S_{BOC}} = \frac{OD}{OB} = 5 \Rightarrow S_{COD} = 5.S_{BOC} = 5.5 = 25$

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{DOC} + S_{COB} + S_{BOA} =$

$= 125 + 25 + 5 + 25 = 180$.

7

5.



Let the angle given is $x S y$.

and $MA \perp \overrightarrow{Sx}$, $A \in \overrightarrow{Sx}$

$MB \perp \overrightarrow{Sy}$, $B \in \overrightarrow{Sy}$

Let $MA = a = 2$ and $MB = b = 3$.

Let C be such point that

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$, and D be such that $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BD}$.

Let $N_0 = CD \cap \overrightarrow{Sx}$ and $K_0 = CD \cap \overrightarrow{Sy}$

We claim that the perimeter of the triangle MN_0K_0 is the smallest possible. ~~Let~~ suppose that it isn't the smallest. There exist points $N_1 \in \overrightarrow{Sx}$ and $K_1 \in \overrightarrow{Sy}$ such that

$P_{MN_1K_1} < P_{MN_0K_0}$

From congruent triangles MN_0A and CN_0A we get $MN_0 = CN_0$, and from MK_0B and DK_0B we get $MK_0 = DK_0$.

So $P_{MN_0K_0} = MN_0 + N_0K_0 + K_0M = CN_0 + N_0K_0 + K_0D = CD$.

and $\underline{P_{MN_1K_1} = CN_1 + N_1K_1 + K_1D < P_{MN_0K_0} = CD}$.

but the last inequality is impossible because of triangle inequality.

So the smallest perimeter is equal to CD.

The triangle SCD has $SC = SM = SD$ and

$\measuredangle DSC = 2 \measuredangle ASB = 2 \cdot 30 = 60^\circ$, so $\triangle SCD$ is equilateral.

and $CD = SC = SM$. Let $SM = x$ $\boxed{SM > MB > MA}$

$\measuredangle ASM = \alpha$ and $\measuredangle BSM = \beta$

$\sin\alpha = \frac{a}{x}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$

$\sin\beta = \frac{b}{x}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{x^2-b^2}}{x}$

$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{a\sqrt{x^2-b^2}}{x^2} + \frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}$

$x^2 = 2a\sqrt{x^2-b^2} + 2b\sqrt{x^2-a^2}$

$x^2 - 2a\sqrt{x^2-b^2} = 2b\sqrt{x^2-a^2}$

$x^4 - 4ax^2\sqrt{x^2-b^2} + 4a^2x^2 - \cancel{4a^2b^2} = 4b^2x^2 - \cancel{4b^2a^2}$

$x^4 + 4a^2x^2 - 4b^2x^2 = 4ax^2\sqrt{x^2-b^2}$ $\quad | : x^2$

$x^2 + 4a^2 - 4b^2 = 4a\sqrt{x^2-b^2}$

$x^4 + 16a^4 + 16b^4 + 8a^2x^2 - 8b^2x^2 - 32a^2b^2 = 16a^2x^2 - 16a^2b^2$

$x^4 - 8x^2(a^2+b^2) + 16a^4 + 16b^4 - 16a^2b^2$

$D = (4a^2+4b^2)^2 - (16a^4 + 16b^4 - 16a^2b^2) =$

$= \cancel{16a^4} + \cancel{16b^4} + 32a^2b^2 - \cancel{16a^4} - \cancel{16b^4} + 16a^2b^2 = 48a^2b^2$

$x^2_{1,2} = 4(a^2+b^2) \pm 4ab\sqrt{3}$, so

$x_{1,2} = \sqrt{4a^2+4b^2 \pm 4ab\sqrt{3}}$

From $x > b$ we see that $x = \sqrt{4a^2+4b^2-4ab\sqrt{3}}$ is impossi

So $x = \sqrt{4a^2+4b^2+4ab\sqrt{3}} = \sqrt{16+36+24\sqrt{3}} = \sqrt{52+24\sqrt{3}} =$

$= 2\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

+

(6.) $12\sin^3 x + 16\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$.

Let $\sin x = t$, $|t| \le 1$

$12t^3 + 16t^2 - 5t - 3 = 0$

	12	16	-5	-3
$\frac{1}{2}$	12	22	6	0

✓

So $12t^3 + 16t^2 - 5t - 3 = (2t-1)(6t^2+11t+3) = 0$

so $t_1 = \frac{1}{2}$ and $t_{2,3} = \frac{-11 \pm \sqrt{49}}{12}$, so $t_2 = -\frac{1}{3}$ and $t_3 = -\frac{3}{2}$

$1 \geq |t_1|$ and $1 \geq |t_2|$, but $1 < |t_3|$ so

$\sin x = t_3$ has no solutions.

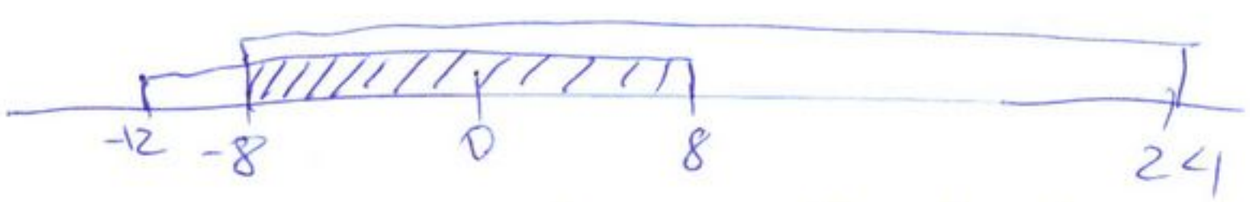
- $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, where $k \in \mathbb{Z}$ or
  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ whe $k \in \mathbb{Z}$.

- $\sin x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \alpha + 2k\pi$ or $x = \beta + 2k\pi$, where $k \in \mathbb{Z}$
  and $0 < \alpha, \beta < 2\pi$, $\sin\alpha = \sin\beta = -\frac{1}{3}$, $\alpha \neq \beta$? +

7 Let first calculate the values of x for which the function is defined

- $192 + 16x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 16x - 192 \leq 0$, $(x-24)(x+8) \leq 0$,
  so $x \in [-8; 24]$

- $96 - 4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 96 \leq 0$ $(x+12)(x-8) \leq 0$
  $x \in [-12; 8]$



Unifying these two intervals we get
$x \in [-8; 8]$

And from the last radical we have
$x^2 - 64 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$ +

Finally the only values, for which the function is defined, are $x = -8$ and $x = 8$.

The function $f(x)$ is even when $f(8) = f(-8)$

$f(8) = 3\sqrt{256} - 4\sqrt{0} - 2\sqrt{0} + p \cdot 8 = 8p + 48$

$f(-8) = 3\sqrt{0} - 4\sqrt{64} - 2\sqrt{0} + p \cdot (-8) = -8p - 32$

The equality $f(8) = f(-8)$ holds, so

$8p + 48 = -8p - 32$

$16p = -48 - 32 = -80$, so $\boxed{p = -5}$