

Международная олимпиада молодежи – 2014/15

Математика

8 класс

Время выполнения задания 120 минут

1. Моторная лодка проходит по реке из А в В за 6 часов, а обратно – за 8 часов. За какое время бревно доплынет из А в В?

Ответ: 48 hours

2. Малыш может съесть банку варенья за 6 минут, а Карлсон – в 2 раза быстрее. За какое время они съедят эту банку варенья вместе?

Ответ: 2 minutes

3. В ноябре на круговом маршруте работали 3 автобуса, причем интервал их движения составлял 10 минут. Как изменится интервал движения автобусов, если в декабре на маршрут выйдет дополнительно 2 таких автобуса?

Ответ: 6 minutes with 5 buses

4. Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=7$. Чему может равняться $a^2+b^2+c^2$?

Ответ: 11

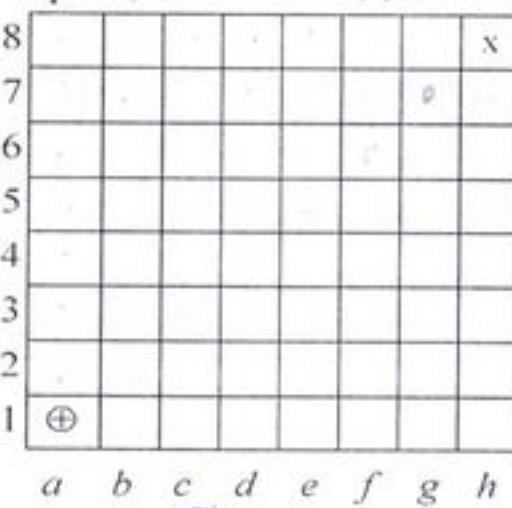
5. Во фразе «Задачи математической олимпиады» передвинем в каждом слове последнюю букву на первое место: «иЗадач йматематическо ѿлимпиад». Сделаем то же самое с полученным текстом, и так далее. Через какое число таких операций мы впервые вернемся к исходному тексту?

Ответ: ~~XX~~ 126 operations

6. Однажды 24 жителя острова правдолюбцев и лжецов сели за круглый стол, и каждый из них заявил: «Один из моих соседей - правдолюбец, а другой лжец». Сколько правдолюбцев и сколько лжецов было среди этих 24 человек? Укажите все ответы.

Ответ: 3 liars and 16 who say the truth or 24 liars and 0 who say the truth

7. На поле a1 шахматной доски стоит фигура. Два игрока передвигают ее по очереди, либо вправо, либо вверх на любое число клеток. Выиграет тот, кто поставит фигуру на поле h8 (обозначено буквой x). Кто победит при правильной игре, первый или второй игрок, и как он должен играть?



Ответ: The second player will win the game

Важно! После каждой задачи запишите краткий ответ в отведенном поле.
Полное развернутое решение запишите на следующих листах, указав номер задачи.
Задание считается выполненным только при условии, что имеется как краткий ответ, так и полное развернутое решение.

①

A _____ B

The boat goes for 6 hours from A to B when it drives on the stream of the river and goes for 8 hour from B to A when it drives against the stream.

$$\Rightarrow (v_{\text{boat}} + v_{\text{stream}}) \cdot 6t = (v_{\text{boat}} - v_{\text{stream}}) \cdot 8t = S_{AB}$$

$$(v_{\text{boat}} + v_{\text{stream}}) \cdot 6 = (v_{\text{boat}} - v_{\text{stream}}) \cdot 8 = S_{AB}$$

$$6 \cdot v_{\text{boat}} + 6 \cdot v_{\text{stream}} = 8 \cdot v_{\text{boat}} - 8 \cdot v_{\text{stream}}$$

$$2v_{\text{boat}} = 14 \cdot v_{\text{stream}} / :2$$

$$v_{\text{boat}} = 7 \cdot v_{\text{stream}}$$

But $v_{\text{wooden piece}} = v_{\text{stream}}$

$$\Rightarrow v_{\text{boat}} = 7 \cdot v_{\text{wooden piece}}$$

$$\Rightarrow (7 \cdot v_{\text{stream}} + v_{\text{stream}}) \cdot 6 \text{ hours} = S_{AB}$$

$$8 \cdot v_{\text{wooden piece}} \cdot 6 \text{ hours} = S_{AB}$$

$$\Rightarrow 48 \text{ hours} \cdot v_{\text{wooden piece}} = S_{AB}$$

\Rightarrow The wooden piece will go from A to B for 48 hours.

②

The kid eats a jar of jam for 6 minutes and Karlson eats a jar of jam for 3 minutes.

For 1 minute the kid will eat $\frac{1}{6}$ of the jam and Karlson will eat $\frac{1}{3}$ of the jam. So they will eat $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ of the jam together for 1 minute. So for 2 minutes they will eat all the jam.

③ The buses ~~arrive~~ in a period of 10 minutes when they are three. So the one bus goes round the circle road for $3 \cdot 10 = 30$ minutes. If the buses are $3+2=5$ they will arrive in every $30:5=6$ minutes.

④ $a+b+c=5$ and $ab+bc+ac=7$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 5^2 = 25$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot 7 = 25$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 11$$

⑤ The word «Задачи» has 6 letters.

The word «Задачи» will be true again after k operations, $k \in \mathbb{N}$ if $6/k$.

The word «математической» has 14 letters.

This word will be true again after m operations, if $14/m$, $m \in \mathbb{N}$

The word «олимпиады» has 9 letters.

This word will be true after n operations, if $9/n$, $n \in \mathbb{N}$

⑥ The sentence will be true when all the words are true.

The sentence will be true after operations which are divided by 6, 14 and 9. \Rightarrow The least number of these operations is $6 \cdot 7 \cdot 3 =$

$$= 6 \cdot 21 = 126.$$

⑥ A person who says the truth must be between one liar and other person who says the truth in the circle table

But a ~~person~~ liar can sit between two other liars or between two ~~persons who~~ people who say the truth.

If the liars sit between two other liars on the table there will be only liars and no people who say the truth.

\Rightarrow there will be 24 liars and 0 people who say the truth

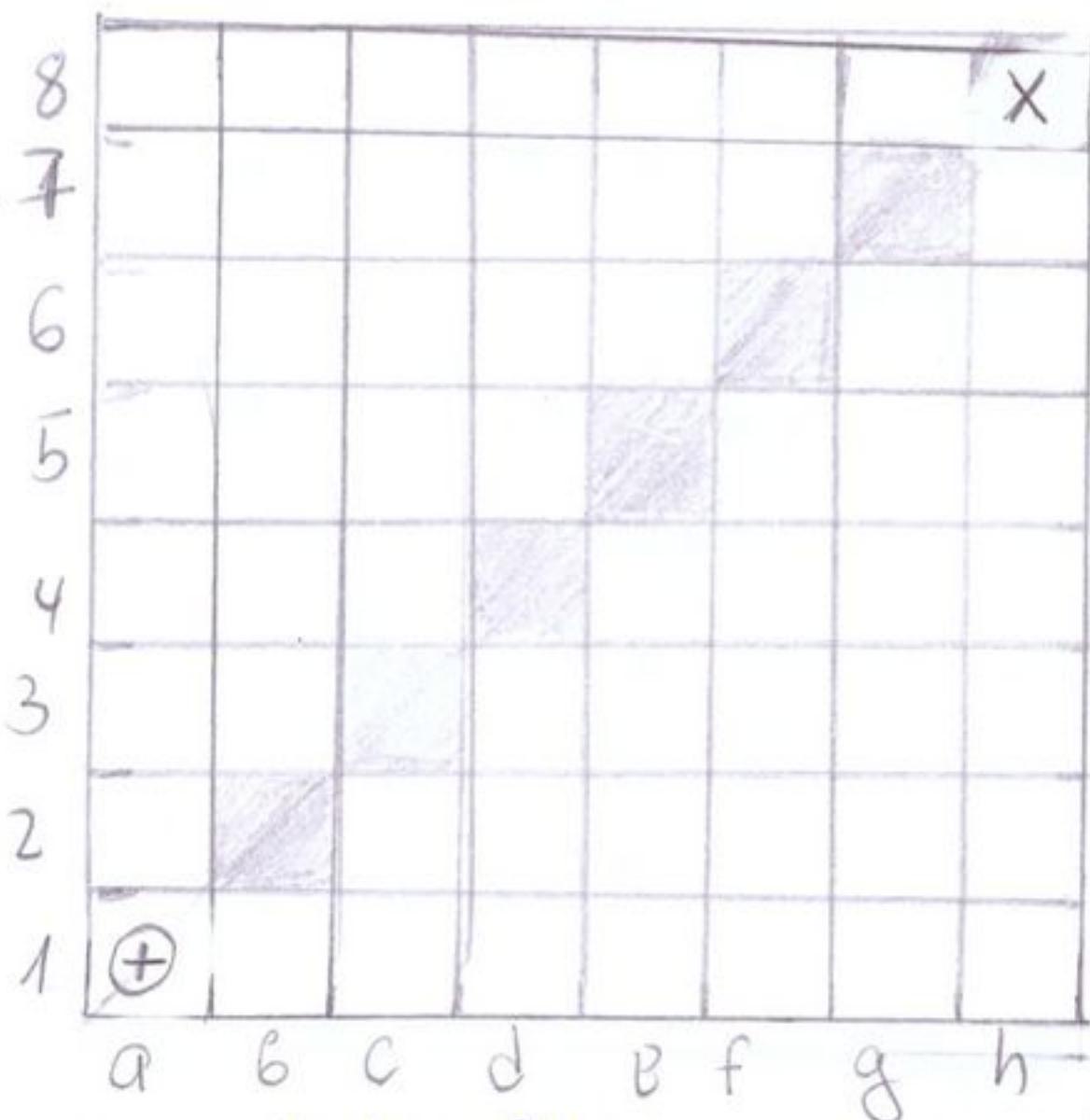
liars - L
who say the truth - T



So if a liars sit between two people who say the truth, the people who say the truth will be twice more than the liars.

And they will be $\frac{2}{3}$ of all the people.

\Rightarrow the liars will be $\frac{1}{3} \cdot 24 = 8$ and people who say the truth will be 16.



The second player will win the game. The game will win the player who put the piece on the black squares. If someone puts it on g7 he will win in his next turn. If he puts it on f6 he will be able to put it on g7 or h8. If he puts it on e5 he will be able to put it on f6; g7 or h8. If he puts the piece on d4 on his next turn he will be able to put it on e5; f6; g7 or h8.

If he puts it on c3 on his next turn he will be able to put it on d4; e5; f6; g7 or h8.

If he puts it on b2 on his next turn he will be able to put it on c3; d4; e5; f6; g7 or h8.

* Because his opponent will move away from black squares.

\Rightarrow The first player will move the piece anywhere on the board and the second will be able to put it on black square and to win.