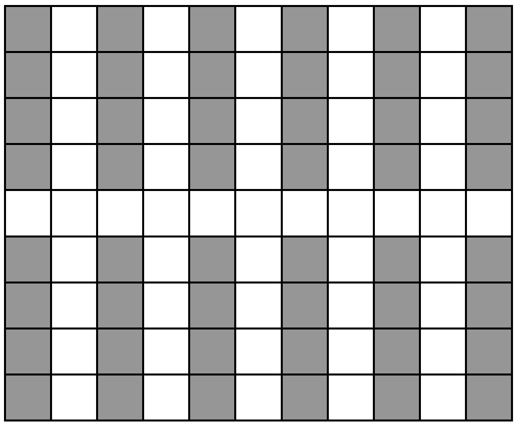
8 класс.

1. Найдите наибольшее возможное значение произведения *Р·Е·Ш·Е·Н·И·Е*, если *Р·Е·П·Е·Т·И·Т·О·Р=Н·У·Ж·Е·Н* (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*).

Ответ: 0. ***Решение***: В нашем наборе ровно 10 букв-цифр, значит, одна из них равна 0. Если 0 использован в равенстве, где ровно 9 разных букв, то это возможно только при *Е*=0, т.к. только эта буква присутствует в обеих частях равенства, которые одновременно должны быть равны 0, тогда и *Р·Е·Ш·Е·Н·И·Е*=0. А если 0 не использован в равенстве, то *Ш*=0 и *Р·Е·Ш·Е·Н·И·Е* снова равно 0. Хотя на самом деле, второй случай и невозможен.

2. Укажите периметр наименьшего по площади прямоугольного клетчатого поля, стороны которого не меньше 8, на котором можно по линиям сетки разместить 12 несоприкасающихся между собой кораблей 1×4.

Ответ: 40. ***Решение***: Каждый корабль занимает 10 узлов клетчатой решётки. Значит, для 12 кораблей нужно поле, содержащее хотя бы $12\cdot10=2^3\cdot3\cdot5=120$ узлов. При 120 узлах получаем единственную решётку 10×12, т.к. только она содержит сторону не меньше 8 клеток и соответствует полю 9×11 площади 99, причём это наименьшее по площади поле с наименьшей стороной 9. Если меньшая сторона равна 8, то поле содержит не меньше $9\cdot14=128$ узлов и площадь будет не менее $8\cdot13=104$ клеток, что большее 99. Если же меньшая сторона будет не меньше 10, то поле содержит не менее $10\cdot10=100$ клеток, что также больше 99. Значит, наименьшая площадь нужного нам прямоугольного поля – 99, а его периметр равен $2\cdot(9+11)=40$. При этом на поле 9×11 можно разместить 12 кораблей 1×4 – см. рис.



3. Найдите наибольшее натуральное число *n*, равное сумме двух различных натуральных делителей числа *n*+15.

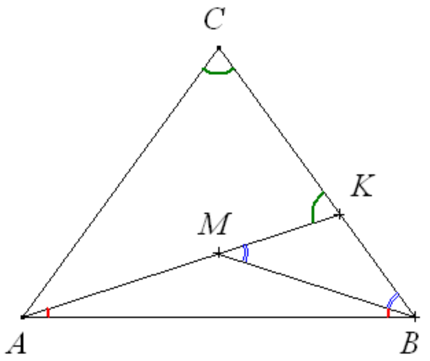
Ответ: 75. ***Решение***: Ни один из этих делителей не может равняться $n+15$, и не может быть, чтобы они оба равнялись $(n+15)/2$. Поэтому их сумма не превосходит $(n+15)/2+(n+15)/3 = 5(n+15)/6$. Решая неравенство $5(n+15)/6\geq n$, получаем $n\leq75$. $n=75$ подходит: 75=45+30, где 45 и 30 – делители числа $n+15=90$.

4. В автобус-«гармошку» на первой остановке вошли *n* пассажиров и получили билеты с последовательными шестизначными номерами (которые могут начинаться и с нулей). При каком наибольшем *n* могло оказаться, что ровно у 1/12 всех пассажиров в номере билета есть цифра 2?

Ответ: 48. ***Решение***: Пусть k – число пассажиров, у которых в билете есть цифра 2. Тогда число всех пассажиров равно $n=12k$. Заметим, что среди любых десяти подряд идущих номеров есть один, содержащий двойку на конце. Значит, $12k<10(k+1)$, откуда $2k<10$, $k<5$. При $k=4$ искомый набор номеров существует, например, от 000 033 до 000 080.

5. На стороне *BC* равнобедренного треугольника *ABC* с целочисленными (в градусах) углами отмечена точка *K*, а на отрезке *AK* отмечена точка *M* так, что *AM*=*MB*, *MK*=*KB*, *AK*=*AC*. Найдите угол *A* (в градусах) треугольника *ABC*.

***Ответ*: 54. *Решение*:** Пусть $\angle MAB=\angle MBA=\alpha$ (в силу равнобедренности $AM=MB$), тогда $\angle BMK=2\alpha$ – внешний для треугольника AMB, $\angle MBK=\angle BMK=2\alpha$ (в силу равнобедренности $MK=KB$), $\angle AKC=4\alpha$ – внешний для треугольника BMK, $\angle ACK=\angle AKC=4\alpha$ (в силу равнобедренности). $\angle ABC=3\alpha\neq\angle ACB=4\alpha$, значит, возможны два варианта равнобедренности исходного треугольника. 1) $\angle BAC=\angle ACB=4\alpha$, значит, сумма углов треугольника $180°=3\alpha+4\alpha+4\alpha=11\alpha$, откуда $\alpha=180°/11$, углы 3α и 4α не являются целочисленными. 2) $\angle BAC=\angle ABC=3\alpha$, значит, сумма углов треугольника $180°=3\alpha+3\alpha+4\alpha=10\alpha$, откуда $\alpha=180°/10=18°$, $\angle A=3\alpha=3\cdot 18°=54°$.



6. На отборочном туре суперолимпиады «Высочайшая проба» девяти школьникам был предложен большой набор задач. Известно, что любые пять участников решили вместе все задачи (т.е. по каждой задаче хоть один из пяти дал правильный ответ), а любые четыре – нет. При каком минимальном количестве задач это могло быть?

***Ответ*: 126. *Решение*:** Заметим, что для каждой задачи количество школьников, не решивших её, не больше четырёх, иначе по какой-то задаче не ответили некоторые пять человек, что противоречит условию. С другой стороны, для каждой четвёрки людей найдется задача, по которой они не справились (иначе они бы вместе решили все задачи вопреки условию); таким образом, эту задачу не решили в точности эти четверо школьников. Итак, каждой четвёрке людей можно поставить в соответствие задачу, которую они (и только они) не решили. Поэтому число задач не меньше числа четвёрок людей, которые можно выбрать из 9 человек (т.е. числа сочетаний из 9 по 4 – $C_9^4=\frac{9!}{4!\cdot 5!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2}=126$). Наоборот, если задач было столько, сколько имеется четвёрок людей, причём каждую задачу не решили 4 человека и все эти четверки различны, то требуемое условие нашей задачи выполняется.

7. Два десятизначных числа из различных цифр назовём *братскими*, если их сумма является числом из одинаковых цифр. Чему равна максимально возможная разность братских чисел?

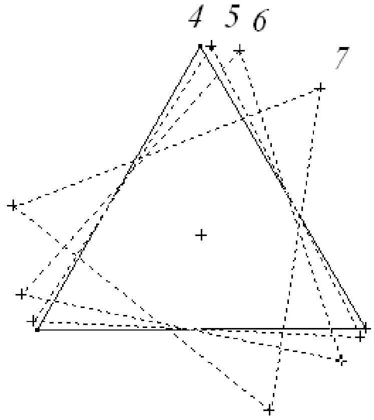
***Ответ*: 7953086421. *Решение*:** Сумма цифр каждого числа равна 45 и делится на 9, значит, по признаку делимости, каждое число делится на 9, тогда и их сумма делится на 9. При этом сумма братских чисел будет в пределах от 10-значного числа из двоек до 11-значного из единиц, т.к. сумма заведомо меньше $2\cdot 9876543210=19753086420$. В этом интервале только одно число из одинаковых цифр делится на 9 – это число 9999999999. Чтобы в разряде единиц суммы братских чисел получилась 9, то в самих братских числах в разряде единиц должны стоять две цифры, в сумме дающие 9, т.к. такая сумма не больше 18. Значит, нет перехода единицы в следующий разряд, тогда аналогично в следующих разрядах в братских числах цифры в сумме дают 9. Следовательно, в братских числах в каждом разряде стоят цифры, дающие в сумме 9, при этом братские числа начинаются максимум с 8 и разбиваются на пары, дающие в сумме число 9999999999=1023456789+8976543210=…. Тогда максимально возможная разность братских чисел будет между самым большим (8976543210) и самым маленьким (1023456789) числами требуемого вида, т.к. они образуют братскую пару: 8976543210–1023456789=7953086421.

8. В однокруговом (каждый с каждым играет один раз) теннисном турнире участвовали 33 теннисиста (ничьих не бывает). Оказалось, что по крайней мере треть теннисистов имеют не более *n* поражений. При каком наименьшем *n* такое могло быть?

***Ответ*: 5. *Решение*:** Между собой треть теннисистов сыграли $11\cdot10/2=55$ игр, и в каждой кто-то терпел поражение. Значит, по принципу Дирихле кто-то из этих 11-ти потерпел в этих играх не меньше 5 поражений. Подойдёт следующий пример: выстроим 11 теннисистов по кругу и пусть каждый выиграл у 5 следующих за ним по часовой стрелке, каждый из этих 11 выиграл у остальных 22 теннисистов, которые сыграли между собой произвольным образом.

9. Петя выложил на столе 100 карточек, на каждой из которых на обратной (невидимой) стороне написал одно из целых чисел от 1 до 100 (числа не повторяются). Вася за один вопрос может показать на любые четыре карточки и узнать набор чисел, написанных на них. За какое наименьшее число вопросов Вася может узнать на какой карточке какое число записано?

***Ответ*: 40. *Решение*:** Пусть было задано N вопросов. Ясно, что каждая карточка, за исключением возможно одной, участвует хотя бы в одном вопросе, иначе число на ней мы не определим. Пусть есть k карточек, участвующих ровно в одном вопросе. Тогда в одном вопросе не может встретиться двух таких карточек, иначе невозможно установить, какое число на которой из карточек написано. Следовательно, $k\le N$. Остальные карточки, за исключением быть может одной, участвовали хотя бы в двух вопросах. Теперь, просуммировав для каждой карточки количество вопросов, в которых она участвовала, получим учетверённое количество вопросов. Поэтому $4N\ge k+2\cdot(99-k)=198-k\ge198-N$, откуда $5N\ge198$, $N\ge40$. Приведём способ узнать числа за 40 вопросов. Разобьём карточки на 10 групп по 10 карточек и пронумеруем их в каждой группе числами от 1 до 10. Зададим в каждой группе 4 вопроса: (1,2,3,4), (2,5,6,7), (3,6,8,9), (4,7,8,10). Тогда числа на карточках 2, 3, 4, 6, 7, 8 встречаются в двух ответах (для разных карточек – в разных парах) и поэтому однозначно определяются, а числа на карточках 1, 5, 9, 10 – оставшиеся числа в каждом из ответов. Всего будет задано $10\cdot4=40$ вопросов.



10. Вася, изучая геометрическую компьютерную программу, развлекался, поворачивая равносторонний треугольник относительно его центра по часовой стрелке: сначала на 1/9 градуса, затем второй треугольник – на 1/3 градуса, затем третий треугольник – на 1 градус и т.д. до 3^{100} градусов, увеличивая на каждом шаге угол поворота в 3 раза. Сколько всего разных несовпадающих положений треугольника мог получить Вася, включая начальное?

***Ответ*: 7. *Решение*:** Посмотрим повороты, начиная с четвёртого треугольника. Он после четвёртого своего поворота перейдёт сам в себя, т.к. повернётся на 3°+9°+27°+81°=120°. Пятый после чётвёртого поворота также перейдёт сам в себя, т.к. за четыре поворота повернётся на 3·(3°+9°+27°+81)=360°. Аналогично и все остальные будут после четырёх поворотов переходить сами в себя, т.к. будут поворачиваться на угол, кратный 360°. Значит, начиная с 8-го треугольника, будет постоянный повтор треугольников с 4-го по 7-й.