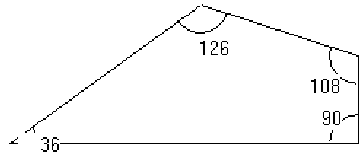
9 класс

1. Найдите наименьший угол выпуклого четырёхугольника (в градусах), если известно, что величины внешних углов четырёхугольника относятся как 3:4:5:8.

Ответ: 36. ***Решение***: Пусть углы четырёхугольника равны α_1, α_2, α_3 и α_4, тогда выполняется соотношение $(180–\alpha_1):(180–\alpha_2):(180–\alpha_3):(180–\alpha_4)=3:4:5:8$. По свойству ряда равных отношений получим, что

$$\frac{180-\alpha_1}{3}=\frac{180-\alpha_2}{4}=\frac{180-\alpha_3}{5}=\frac{180-\alpha_4}{8}=\frac{(180-\alpha_1)+(180-\alpha_2)+(180-\alpha_3)+(180-\alpha_4)}{3+4+5+8}=,$$

$$=\frac{720-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}{20}=\frac{360}{20}=18,$$ откуда наименьший угол $\alpha_4=180–8\cdot18=36$. И такой выпуклый четырёхугольник с углами 126°, 108°, 90° и 36° существует (см. рис.), т.к. тогда внешние углы 54, 72, 90 и 144 относятся как 3 : 4:5:8.



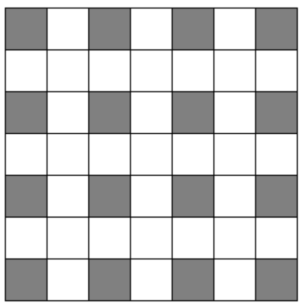
2. Пусть x_1, x_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом 1; y_1, y_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом 9; z_1, z_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом D. При каком наибольшем D могло выполняться равенство $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$?

Ответ: 16. ***Решение***: Если x_1, x_2 – корни приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$, тогда по теореме Виета $(x_2 – x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 – 4x_1x_2 = p^2 – 4q = D$, значит,

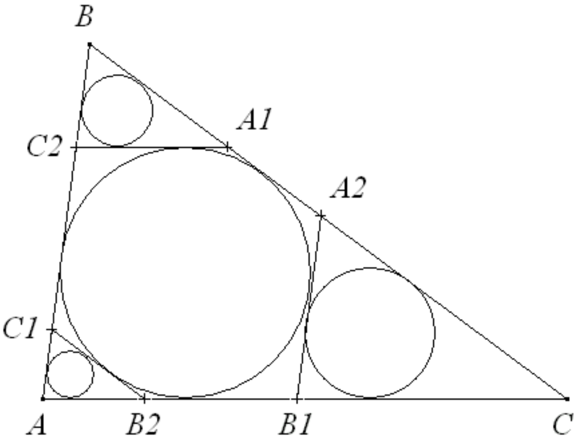
$|x_2 – x_1|=1$. Аналогично, $|y_2 – y_1|=3$, $|z_2-z_1|=\sqrt{D}$. Тогда равенство $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$ возможно в одном из случаев $\pm1\pm3\pm\sqrt{D}=0$, откуда $D\in\{4, 16\}$. Значит, наибольший дискриминант $D=16$ и такие трехчлены существуют, например, x^2+x, x^2+3x и x^2+4x с дискриминантами 1, 9 и 16 соответственно.

3. На белой доске 7×7 одну из клеток закрасили. За один ход разрешается узнать количество закрашенных клеток в любом квадрате 2×2. За какое наименьшее число ходов можно гарантированно найти закрашенную клетку?

Ответ: 15. ***Решение***: Будем считать, что закрашенная клетка – 1, незакрашенные – 0, а на каждом ходу мы спрашиваем сумму чисел в клетках квадрата 2×2. Отметим на доске 16 клеток так, как показано на рисунке. Каждым ходом мы можем проверить не более 1 отмеченной клетки, всего их 16. Для гарантированного нахождения 1 необходимо проверить все отмеченные клетки, кроме возможно одной, значит, необходимо не менее 15 ходов. Теперь докажем, что нам хватит 15 ходов. Сначала будем проверять 9 квадратов 2×2, образующих нижний угловой квадрат 6×6. Если в одном из этих квадратов есть 1, то нам хватит 2 хода, чтобы определить, где 1 находится (сдвигаем квадрат 2×2, фактически деля зону проверки каждый раз пополам). Затем проверяем правый верхний квадрат 2×2. Если в нём есть 1, то нам хватит 2 хода, чтобы определить, где именно находится 1. Потом проверяем квадраты, имеющие общие стороны с правым верхним и следующие за ними. Если в одном из этих квадратов 1, то нам хватит 1 хода, чтобы определить, где именно находится 1. Таким образом, после 14 ходов остаётся только две непроверенных угловых клетки. Проверяя одну из них, мы точно узнаем, где 1. Получаем, что 15 ходов нам хватит.



4. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки C_1, C_2 (C_2 ближе к B), на стороне BC – точки A_1, A_2 (A_2 ближе к C), на стороне CA – точки B_1, B_2 (B_2 ближе к A). Оказалось, что C_2A_1 параллельна CA, A_2B_1 параллельна AB, B_2C_1 параллельна BC и все эти шесть прямых касаются вписанной окружности треугольника ABC. Радиусы вписанных окружностей треугольников AB_2C_1, BC_2A_1 и CA_2B_1 равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ и $\sqrt{18}$ соответственно. Найдите отношение $AB{:}C_2B$.



***<u>Ответ</u>*: 3. *<u>Решение</u>*:** Заметим, что в силу равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки, сумма периметров маленьких треугольников равна периметру большого. Т.к. все четыре треугольника подобны, то и сумма радиусов $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}=6\sqrt{2}$ маленьких треугольников равна радиусу большого. Значит, стороны треугольников ABC и BC_2A_1 относятся как радиусы вписанных в них окружностей, т.е. $AB{:}C_2B=6\sqrt{2}:\sqrt{8}=3$.

5. Найдите наибольшее натуральное число, факториал которого не делится на 3^{2019}.

***<u>Ответ</u>*: 4049. *<u>Решение</u>*:** Нужная нам степень вхождения 3 в числа 4047! и 4050! согласно формуле Лежандра равна

$$e_5(4047)=\left[\frac{4047}{3}\right]+\left[\frac{4047}{3^2}\right]+\left[\frac{4047}{3^3}\right]+...=1349+449+149+49+16+5+1=2018,$$

$$e_5(4050)=\left[\frac{4050}{3}\right]+\left[\frac{4050}{3^2}\right]+\left[\frac{4050}{3^3}\right]+...=1350+450+150+50+16+5+1=2022.$$

Для чисел 4048 и 4049 она также будет равна 2018, для больших 4049 она уже будет больше 2019, а для меньших 4047 она будет меньше 2018.

6. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если даны координаты всех его вершин – $A(1;\ 2)$, $B(5;\ 10)$, $C(12;\ 16)$, $D(20;\ 10)$.

***<u>Ответ</u>*: 105. *<u>Решение</u>*:** Координаты векторов AB, AC, AD равны соответственно (4; 8), (11; 14), (19; 8), тогда в силу того, что тангенсы угла наклона этих векторов 8/4=2, 14/11 и 8/19 упорядочены по убыванию, то вектор AC лежит между векторами AB и AD, угол между которыми меньше 90°. Значит, площадь четырехугольника ABCD равна сумме площадей треугольников ABC и ACD, которые равны соответственно $\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}4 & 8\\ 11 & 14\end{vmatrix}=\frac{|4\cdot 14-8\cdot 11|}{2}=16$ и $\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}11 & 14\\ 19 & 8\end{vmatrix}=\frac{|11\cdot 8-14\cdot 19|}{2}=89$, т.е. равна 16+89=105. ***<u>Комментарий</u>*:** *Это чисто профессиональное олимпиадное решение, но требуемую площадь, конечно же, можно найти, отрезав от прямоугольника несколько прямоугольных треугольников, площади которых легко находятся.*

7. Какое наименьшее значение может принимать сумма целых чисел x и y, удовлетворяющих равенству $2xy+3x–5y+2019=0$?

Ответ: –2025. ***Решение***: Умножим уравнение на 2 и разложим левую часть на множители, перенеся соответствующее слагаемое направо: $(2x–5)(2y+3)= –15–2\cdot 2019 = –4053$. Тогда $2x–5=a$ и $2y+3=b$ – два нечётных числа, дающих в произведении –4053. Сумма $x+y=(a+b+2)/2$ будет наименьшей тогда, когда $\{a, b\}=\{–4053, 1\}$, т.к. при увеличении меньшего (отрицательного) из чисел a и b с фиксированным отрицательным произведением второе (положительное) число также будет расти, значит, и сумма $x+y$ будет расти.

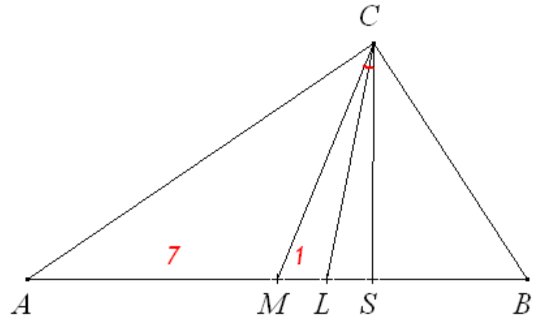
8. *CM, CL* – соответственно медиана и биссектриса треугольника *ABC*, точка *S* на стороне *AB* такова, что $\angle MCL=\angle LCS$ (*L* между *M* и *S*). Найдите *MS*, если *AB*=14, *BL*=6.

Ответ: 1,96. ***Решение***: Из условия равенства углов следует, что *CS* – симедиана (симметрична медиане относительно биссектрисы). Тогда по свойствам симедианы и биссектрисы

$$\frac{AS}{BS}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=\left(\frac{AL}{BL}\right)^2=\left(\frac{AB-BL}{BL}\right)^2=\left(\frac{14-6}{6}\right)^2=\frac{16}{9},$$

$$AS=\frac{16}{16+9}\cdot AB=\frac{16}{25}\cdot 14=8{,}96,$$

$$MS=AS-AM=8{,}96-7=1{,}96.$$



9. Попарно различные натуральные числа *a, b, c, d* таковы, что графики функций $y=x^2–ax+b$ и $y=x^2–cx+d$ пересекаются в точке с координатами (3; 1). Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из чисел *b* и *d*?

Ответ: 7. ***Решение***: Из условия следует, что $1=3^2–3a+b=3^2–3c+d$, откуда $b\equiv d\equiv 1 \pmod 3$. С точностью до симметрии можно считать, что $d>b$, значит, наименьшим возможным значением для d будет 4, далее возможно 7 и т.д. Если $d=4$, тогда $b=1$, $a=3$, $c=4$ – повтор значений. Если $d=7$, тогда возможен случай $b=1$, $a=3$, $c=5$, дающий различные значения наших чисел.

10. Дана последовательность $\{a_n\}$: $a_1=1$, $a_{2n}=a_n$, $a_{2n+1}=a_{2n}+1$. Для скольких натуральных *n*, не превосходящих 2019, выполняется равенство $a_n=9$?

Ответ: 45. ***Решение***: a_n – количество единиц в двоичной записи числа n, что можно доказать по индукции. $2019=11111100011_2$ – 11-значный код и $a_{2019}=8$. Среди 2^{11} чисел, которые можно записать в двоичной системе с помощью 11 цифр, нужных нам (т.е. с девятью единицами) будет $C_{11}^9=\frac{11!}{9!\cdot 2!}=\frac{11\cdot 10}{2}=55$. Но десять чисел, начинающихся на 6 единиц (два нуля можно на пяти оставшихся местах поставить $C_5^2=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$ способами) будут больше 2019, значит, нужных нам чисел 45=55–10.