10 класс

1. Найдите расстояние от начала координат до множества точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+6x+8y+24=0$.

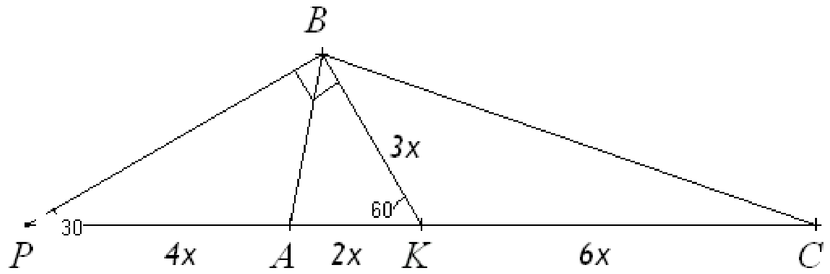
Ответ: 4. ***Решение***: Это расстояние от начала координат (точки O) до точки B, конца радиуса AB=1 и лежащей на отрезке AO, где $A(-3;-4)$ – центр окружности $(x+3)^2+(y+4)^2=1$, которой и является наша кривая, а $AO=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5>1$.

2. Найдите наименьший из коэффициентов a и b кубического многочлена x^3+ax^2+bx+3, имеющего три различных корня, два из которых являются корнями квадратного трехчлена x^2+2x-1.

Ответ: –7. ***Решение***: Пусть t – третий корень кубического многочлена, отличный от корней трехчлена, тогда $x^3+ax^2+bx+3 = (x-t)(x^2+2x-1) = x^3+(2-t)x^2+(-1-2t)x+t$, откуда $t=3$, $a=2-t=-1$, $b=-1-2t=-7$. При этом корень t=3 отличен от корней трехчлена.

3. В треугольнике ABC $AB=\sqrt{21},\ BC=3\sqrt{21}$, биссектриса внешнего угла при вершине B пересекает прямую AC в точке P, угол APB равен 30°. Найдите BP.

Ответ: 9. ***Решение***: Пусть K – точка пересечения внутренней биссектрисы из вершины B, тогда по свойствам внутренней и внешней биссектрис $\frac{CP}{AP}=\frac{CK}{AK}=\frac{CB}{AB}=3$ и угол $\angle KBP$=90° (см. рис.). Пусть $AK=2x$, тогда $CK=6x$, $AP=AC/2=4x$, а в прямоугольном треугольнике KBP катет BK напротив угла в 30° равен половине гипотенузы $PK=6x$, т.е. $BK=3x$, при этом $BP=\sqrt{3}BK=3\sqrt{3}x$. В треугольнике BKA с $\angle BKA$=60° применим теорему косинусов: $AB^2=AK^2+BK^2-2AK\cdot BK\cdot\cos 60°$, что равносильно уравнению $21=4x^2+9x^2-2\cdot 2x\cdot 3x\cdot\frac{1}{2}=7x^2$, откуда $x=\sqrt{3},\ BP=3\sqrt{3}x=9$.



4. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $(x^2-y^2)^2=1+20x$?

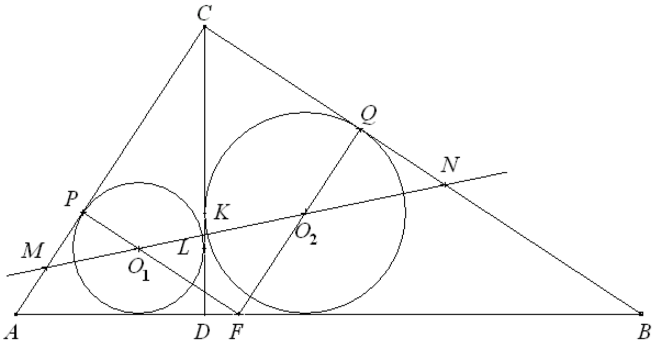
Ответ: 6. ***Решение***: Правая часть неотрицательна, т.к. равна квадрату, следовательно, $x\geq 0$, откуда левая часть не меньше $(2x-1)^2$, так как модуль разности x^2 и любого квадрата целого числа (если $x\geq 0$ и квадраты различны) не меньше $|2x-1|$. Имеем $(2x-1)^2\leq 1+20x$, откуда $x\leq 6$. Итак, правая часть может принимать значения 1, 21, 41, 61, 81, 101, 121 из них квадратами являются только 1, 81, 121. Рассмотрим эти 3 случая и найдём в каждом из них по 2 решения: (0; ±1), (4; ±5), (6; ±5).

5. Петя выложил на столе 2019 карточек, на каждой из которых на обратной (невидимой) стороне написал одно из целых чисел от 1 до 2019 (числа не повторяются). Вася за один вопрос может показать на любые три карточки и узнать набор

чисел, написанных на них. За какое наименьшее число вопросов Вася может узнать на какой карточке какое число записано?

***Ответ*: 1009. *Решение*:** Пусть было задано N вопросов. Ясно, что каждая карточка, за исключением возможно одной, участвует хотя бы в одном вопросе, иначе число на ней мы не определим. Пусть есть k карточек, участвующих ровно в одном вопросе. Тогда в одном вопросе не может встретиться двух таких карточек, иначе невозможно установить, какое число на которой из карточек написано. Следовательно, $k \le N$. Остальные карточки, за исключением быть может одной, участвовали хотя бы в двух вопросах. Теперь, просуммировав для каждой карточки количество вопросов, в которых она участвовала, получим утроенное количество вопросов. Поэтому $3N \ge k+2\cdot(2018-k)= 4036-k \ge 4036-N$, откуда $4N \ge 4036$, $N \ge 1009$. Приведём способ узнать числа за 1009 вопросов. Пронумеруем карточки числами от 1 до 2019. Зададим 1009 вопросов: (1,2,3), (3,4,5), (5,6,7), …, (2017,2018,1). Тогда числа на нечётных карточках от 1 до 2017 встречаются в двух ответах (для разных карточек – в разных парах) и поэтому однозначно определяются, а числа на чётных карточках от 2 до 2018 – оставшиеся числа в каждом из ответов. Число на карточке 2019 оказывается оставшимся после того, как мы узнали числа на 2018 карточках.

6. В прямоугольном треугольнике *ABC* на гипотенузу *AB*=23 опустили высоту *CD*=10, которая разделила треугольник на два меньших треугольника, в каждый из которых вписали окружность. Прямая, проходящая через центры этих окружностей, пересекает катеты *AC* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите площадь треугольника *CMN*.



***Ответ*: 50. *Решение*:** Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, r_1 и r_2 – их радиусы, P и Q – точки касания окружностей со сторонами AC и BC, L и K – со стороной DC, M и N – точки пересечения прямой O_1O_2 со сторонами AC и BC, F – точка пересечения прямых PO_1 и QO_2 (см. рис.). Тогда $PCQF$ – прямоугольник, $PF=CQ$, $QF=CP$. Поэтому $FO_1=PF-r_1=CQ-r_1=CK-r_1$, $FO_2=FQ-r_2=CP-r_2=CL-r_2$. Поскольку $CK+r_2=CL+r_1=CD$ (т.к. CD – высота), то $CK-r_1=CL-r_2$, тогда $FO_1=FO_2$ и $\angle FO_1O_2=45°$. Следовательно, $\angle CNM=45°$, $CN=CQ+r_2=CK+r_2=CD=h=10$. Тогда площадь равнобедренного прямоугольного треугольника CMN равна $CN^2/2=h^2/2=10^2/2=50$ и не зависит от длины гипотенузы AB.

7. Найдите натуральное число *n* такое, что у многочлена, равного $(1+x^5+x^7)^n$, коэффициент при x^{17} равен 495.

***Ответ*: 11. *Решение*:** Число 17 представляется в виде суммы чисел 5 и 7 следующим образом: 17=7+5+5; с точностью до перестановки слагаемых это представление единственно. В одном из n выражений $1+x^5+x^7$ мы должны выбрать x^7, а в двух из $(n-1)$ оставшихся таких выражений мы должны выбрать x^5. Поэтому коэффициент при x^{17}

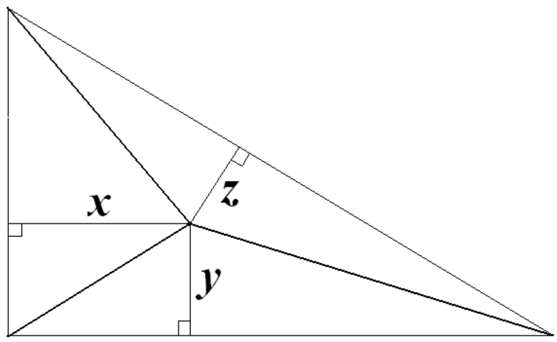
равен $n\cdot C_{n-1}^{2}=n\cdot\dfrac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}=495$ силу возрастания получившегося кубического многочлена с ростом n значение 495 принимает только при n=11.

8. Натуральное число назовём *пятнистым*, если оно состоит из различных ненулевых цифр, сумма которых делится на 5. Сколько различных простых делителей имеет сумма всех семизначных пятнистых чисел?

***<u>Ответ</u>*: 6. *<u>Решение</u>*:** Разобьём все такие числа на группы с одинаковым набором из 7 различных ненулевых цифр, сумма которых делится на 5. Тогда в каждой группе 7! чисел, а каждая цифра будет ровно по 6! раз стоять в каждом из разрядов, т.к. остальные цифры можно будет переставлять 6! способами. Значит, в каждой группе сумма чисел равна $6!\cdot 1111111\cdot S$, где S – сумма цифр группы. Вся сумма 9 различных ненулевых цифр равна 45, невзятые в набор цифры в сумме дадут или 5 (2 варианта – 1+4, 2+3), или 10 (4 варианта – 1+9, 2+8, 3+7, 4+6), или 15 (2 варианта – 6+9, 7+8). Следовательно, сумма всех наших семизначных чисел равна $6!\cdot 1111111\cdot(2\cdot 40+4\cdot 35+2\cdot 30)=6!\cdot 1111111\cdot 280=6!\cdot 4649\cdot 239\cdot 2^{3}\cdot 5\cdot 7$, где различными простыми делителями будут 2, 3, 5, 7, 239 и 4649 – всего 6 чисел.

9. Пусть *PM, PN* и *PK* – длины перпендикуляров, опущенных на прямые, содержащие стороны треугольника, из некоторой точки *P* внутри треугольника. Найдите наибольшее возможное целое значение произведения *PM·PN·PK*, если стороны треугольника равны 9, 12 и 15.

***<u>Ответ</u>*: 28. *<u>Решение</u>*:** Заметим, что данный треугольник – прямоугольный, т.к. его стороны удовлетворяют теореме Пифагора. Пусть нужные нам отрезки, проведённые соответственно к сторонам 9, 12 и 15 равны x, y, z, тогда удвоенная площадь всего треугольника равна $108=9\cdot 12=9x+12y+15z$, т.к. данные отрезки фактически являются высотами трёх треугольников, на которые разрезается исходный треугольник отрезками от внутренней точки до вершин. Из неравенства Коши следует, что $\sqrt[3]{9x\cdot 12y\cdot 15z}\le\dfrac{9x+12y+15z}{3}=\dfrac{108}{3}=36$, откуда



получаем, что $xyz\le\dfrac{36^{3}}{9\cdot 12\cdot 15}=\dfrac{144}{5}=28{,}8$, при этом равенство достигается при условии $9x=12y=15z$, что возможно при соответствующих значениях x, y и z, а тогда в силу непрерывности можно получить и наибольшее целое (28), сдвигая точку P от положения с наибольшим произведением.

10. В однокруговом турнире (каждый с каждым должен сыграть один раз) между 12 шахматистами к некоторому моменту было сыграно 45 партий, причём каждый шахматист сыграл чётное количество партий, а один всё это время был болен, наконец-то поправился и теперь смог принять участие в турнире. Сколькими способами можно провести ещё несколько партий так, чтобы каждый шахматист сыграл нечётное число партий? Способы, отличающиеся только порядком сыгранных партий, считаются одинаковыми.

Ответ: 1024. ***Решение***: Рассмотрим граф несыгранных партий, вершины – шахматисты, несыгранные партии – рёбра. Имеем связный за счёт бывшего больного шахматиста граф на 12 вершин и $C_{12}^2 - 45 = \frac{12\cdot 11}{2} - 45 = 66 - 45 = 21$ рёбер, при этом степень каждой вершины нечётна, т.к. каждому осталось сыграть нечётное количество партий из 11 необходимых. Будем рассуждать, допуская в нашем графе наличие кратных рёбер и петель. Пронумеруем рёбра нашего исходного графа G. Пусть 21-е ребро соединяет вершины A и B. Рассмотрим граф G_1, в котором вершины A и B слились, а 21-е ребро исчезло, при этом другие рёбра между этими вершинами превратились в петли в обобщённой вершине AB. Заметим теперь, что существует взаимно-однозначное соответствие между способами стирания рёбер в графах G и G_1, надо только правильно распорядиться ребром номер 21 в графе G, чтобы степени вершин A и B оказались чётными. Таким образом, мы доказали, что объединение двух вершин со стиранием одного ребра между ними сохраняет количество способов стирания рёбер. Проделаем такую операцию 11 раз, что можно сделать за счёт связности графа, и получим граф G_{11}, состоящий из одной вершины, у которой 10 рёбер-петель. Но в таком графе можно стереть любое подмножество рёбер, т.к. степень вершины окажется равна удвоенному количеству оставшихся петель, т.е. будет чётной. Количество таких подмножеств равно 2^{10}=1024.