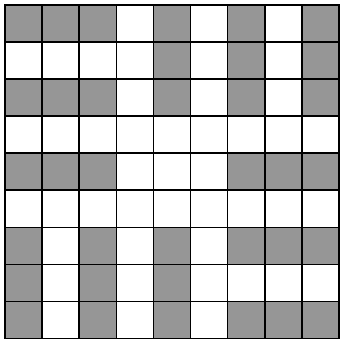
7 класс.



1. Укажите сторону наименьшего по площади клетчатого квадратного поля, на котором можно по линиям сетки разместить 12 несоприкасающихся между собой кораблей 1×3.

Ответ: 9. ***Решение***: Каждый корабль занимает 8 узлов клетчатой решётки. Значит, для 12 кораблей нужно поле, содержащее хотя бы $12\cdot 8=96$ узлов. Минимальным по площади будет поле 9×9, содержащее 81 клетку и $10\cdot 10=100$ узлов, т.к. меньшие квадратные поля содержат не более $9^2=81$ узла, что меньше нужных 96. Пример методом «пропеллера» – см. рис.

2. У Маши и Даши были два одинаковых прямоугольника. Каждая разрезала свой прямоугольник на два прямоугольника, при этом у Маши получились прямоугольники с периметрами 20 см и 30 см, а у Даши – прямоугольники с периметрами 29 см и 35 см. Чему равна меньшая сторона первоначального прямоугольника (в см)?

Ответ: 6. ***Решение***: Девочки разрезали изначальный прямоугольник размерами $a\times b$ и периметра $P=2(a+b)$ в разных направлениях, т.к суммарный периметр прямоугольников Маши равен $20+30=50=P+2a$, а у Даши – $29+35=64=P+2b$. Сложим эти 2 равенства и получим, что $114=2P+2a+2b=3P$, т.е. $P=38$. Тогда $a=(50–P)/2=6$, $b=(64–P)/2=13$. При этом Маша могла получить прямоугольники 6×4 и 6×9, а Даша – 13×1,5 и 13×4,5.

3. Известно, что $\dfrac{В+Ы+С+Ш+А+Я}{П+Р+О+Б+А}=3$ (***одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры***). **Сколько разных значений может принимать цифра «*А*»?**

Ответ: 2. ***Решение***: Заметим, что в наборе букв «ВЫСШАЯПРОБА» присутствуют все 10 различных цифр-букв, а буква «*А*» (цифра a) встречается дважды, значит, если $П+Р+О+Б+А=n\geq 0+1+2+3+4=10$, то $В+Ы+С+Ш+А+Я=(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+a)–(П+Р+О+Б+А)=45+a–n$, тогда $\dfrac{В+Ы+С+Ш+А+Я}{П+Р+О+Б+А}=\dfrac{45+a-n}{n}=\dfrac{45+a}{n}-1=3$,

откуда $\dfrac{45+a}{n}=4$, значит, $45+a$ делится на 4. Но $45\leq 45+a\leq 45+9=54$ и в этом интервале только два числа кратны 4 (48 и 52), которым соответствуют $a\in\{3,\ 7\}$, $n\in\{12,\ 13\}$, при этом для каждого из этих случаев нетрудно подобрать набор подходящих цифр.

4. Найдите сумму всех натуральных чисел, меньших 2019 и не являющихся взаимно простым с ним. Напомним, что два целых числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, отличных от единицы.

Ответ: 680403. ***Решение***: Разложим на простые множители $2019=3\cdot 673$. Значит, в сумму входят все числа, кратные 3 и меньшие 2019 (их ровно 672), а также числа 673 и $2\cdot 673=1346$, сумма которых равна $673+2\cdot 673=3\cdot 673=2019$. Тогда все нужные нам

672+2=674 числа разбиваются на 674:2=337 пар, в каждой из которых сумма равна 2019 = 3+2016 = 6+2013 = …= 1008+1011. Значит, вся сумма равна 337·2019=680403.

5. Найдите наименьший угол треугольника (в градусах), если известно, что внешние углы треугольника относятся как 2:3:4.

***Ответ*: 20. *Решение*:** Пусть углы треугольника равны α, β и γ, тогда выполняется соотношение $(180-\alpha):(180-\beta):(180-\gamma)=2:3:4$. По свойству ряда равных отношений получим, что

$$\frac{180-\alpha}{2}=\frac{180-\beta}{3}=\frac{180-\gamma}{4}=\frac{(180-\alpha)+(180-\beta)+(180-\gamma)}{2+3+4}=\frac{540-(\alpha+\beta+\gamma)}{9}=\frac{360}{9}=40,$$

откуда $\alpha=180-2\cdot40=100$, $\beta=180-3\cdot40=60$, $\gamma=180-4\cdot40=20$.

6. Назовём натуральное число из попарно различных цифр *весёлым,* если произведение любых двух соседних цифр делится на 5, а количество цифр в самом числе – максимально возможное. Сколько существует весёлых чисел?

***Ответ*: 672. *Решение*:** Число содержит максимум 5 цифр, причём в нём чередуются 3 некратных пятёрке цифры и 2 кратных пятёрке цифры, иначе, если в числе не менее 6 цифр, то можно выделить 3 непересекающихся пары соседних цифр, в каждой из которых должна быть кратная пятёрке цифра, но таких цифр всего 2 (0, 5). Тогда на 3 местах для некратных пятёрке цифр их можно поставить $A_8^3=8\cdot7\cdot6=336$ способами, а на 2 местах для кратных пятёрке цифр их можно поставить 2 способами. Всего получаем 336·2=672 весёлых числа.

7. Перед Карлсоном лежат $N\geq3$ кучек с 1, 2, 3,... , N конфетами. За одну операцию Карлсон может добавить 1 конфету в одну из кучек, после чего съесть любую кучку с чётным числом конфет. Если после добавления конфеты чётных кучек нет, он дальше не может есть конфеты. При скольких N, не превосходящих 100, Карлсон может съесть все конфеты?

***Ответ*: 49. *Решение*:** Карлсон должен выполнить N операций, добавив к суммарному количеству конфет $(1+2+\ldots+N=(N+1)\cdot N/2)$ ещё N конфет, т.е. ему надо съесть $(N+3)\cdot N/2$ конфет и это должно быть чётное число, т.к. на каждом шагу Карлсон съедает чётное количество конфет. Значит, N даёт остаток 0 или 1 при делении на 4 (сравнимо с 0 или 1 по модулю 4). При этом сначала он, например, превращает по очереди все нечётные кучки в чётные и тут же съедает их, затем добавляет конфеты в одну и ту же чётную кучку (их чётное количество), а съедает другие чётные кучки. И только на последнем шагу съедает эту увеличивающуюся кучку, в которой в конце окажется чётное количество конфет**.** В пределах от 3 до 100 ровно 100:4=25 чисел, кратных 4, и 24 числа с остатком 1, т.е. всего 25+24=49 нужных нам чисел.

8. В шахматном турнире участвовали 30 шахматистов, причём каждые двое встречались не более одного раза. Оказалось, что любые 20 шахматистов провели между собой не менее 10 партий. Какое наименьшее количество партий могло состояться в этом турнире?

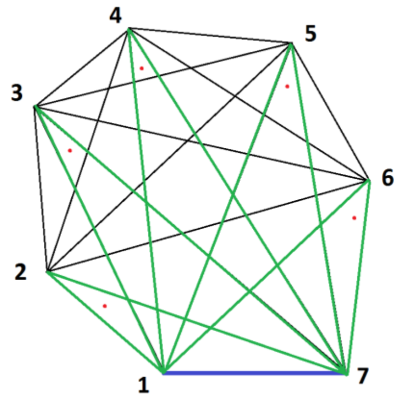
***Ответ*: 30. *Решение*:** Рассмотрим граф, в котором вершины – шахматисты, рёбра - партии. Возьмём вершину с наибольшей степенью, присвоим ей номер 1 и сотрём все исходящие из неё рёбра. После этого рассмотрим вершину с наибольшей степенью в оставшемся графе, присвоим ей номер 2, сотрём все исходящие из неё рёбра и т.д. Если из каждой из первых 10 вершин перед стиранием выходило не меньше, чем по 2 ребра, то всего рёбер не менее 2·10+10=30, поскольку игроки с номерами от 11 до 30 сыграли между собой не менее 20 партий. Если же из вершины 10 перед стиранием выходило не более 1 ребра, то из вершин с номерами от 11 до 30 в этот момент тоже выходит не более чем по одному ребру, но тогда среди 21 вершин с номерами от 10 до 30 есть вершина со степенью 0 и среди этих шахматистов можно найти 20 человек, сыгравших между собой менее 10 партий, – противоречие. Значит, сыграно не менее 30 партий. Пример на 30 партий: игроки выстраиваются по кругу, и каждый играет со следующим по часовой стрелке. В самом деле, уберём 10 из этих 30 человек. Они уменьшили число сыгранных партий максимум на 2·10=20, поэтому оставшиеся 20 человек сыграли между собой не меньше 10 партий.

9. Про набор из пяти попарно различных гирь известно, что каждая гиря весит целое число граммов и суммарный вес любых двух гирь меньше суммарного веса трёх оставшихся. Найдите наименьший возможный вес средней гири.

Ответ: 7. ***Решение***: Упорядочим веса гирь по возрастанию: $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$. Предположим, что $a_3\le 6$. Тогда $a_1+2\le a_2+1\le a_3$, $a_5-2\ge a_4-1\ge a_3$, откуда $a_4+a_5\ge(a_3+1)+(a_3+2)=2a_3-3+6\ge 2a_3-3+a_3=a_3+(a_3-1)+(a_3-2)\ge a_3+a_2+a_1$, что противоречит условию. Значит, $a_3\ge 7$, $a_4\ge 8$, $a_5\ge 9$, $a_4+a_5\ge 17$, следовательно, $a_1+a_2+a_3\ge a_4+a_5+1\ge 18$, откуда $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\ge 18+17=35$. Пример для 35 даёт набор гирь: 5, 6, 7, 8, 9.

10. Набор точек внутри выпуклого 2020-угольника назовём *хорошим*, если любые три вершины нашего 2020-угольника образуют треугольник, внутри которого есть точка этого набора. Какое наименьшее количество точек может содержать хороший набор?

Ответ: 2018. ***Решение***: Рассмотрим в общем виде произвольный выпуклый n-угольник. Необходимо не менее $n-2$ точек, т. к. диагонали из одной вершины разбивают n-угольник на $n-2$ непересекающихся треугольника. Расположим $n-2$ точек следующим образом (на примере 7-угольника – см. рис.). Выберем любою сторону (1-7, синяя). Для каждой из остальных вершин рассмотрим угол, опирающийся на эту сторону (зеленый). Поставим точку в треугольнике, отсекаемом от этого угла отрезком между соседними с ней вершинами. Тогда для любых трёх вершин $a<b<c$ в треугольнике abc будет точка при вершине b: так как, если



вместо a взять 1, то количество точек внутри треугольника abc, согласно нашей расстановке, не увеличится. Аналогично, можно вместо c взять n (в данном случае 7). Но по нашей расстановке внутри любого треугольника $1bn$ есть точка.