11 класс

1. Какое наименьшее количество различных парабол вида *y*=*x*²+*bx*+*c* можно начертить на декартовой плоскости так, чтобы у них было ровно 45 различных точек пересечения?

Ответ: 10. ***Решение:*** Две различные параболы $y = x^2 + b_1x + c_1$ и $y = x^2 + b_2x + c_2$ пересекаются не более чем в одной точке. Точнее, если $b_1 \neq b_2$, то они имеют одну точку пересечения, а если $b_1 = b_2$, $c_1 \neq c_2$, то они не пересекаются. Поэтому у n парабол всего может быть не более $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = C_n^2$ точек пересечения. Тогда 45 точек пересечения могут быть не менее чем у 10 парабол. Пример на 10 парабол с 45 точками пересечения нетрудно построить с соблюдением описанных выше условий.

2. В треугольной пирамиде *ABCS* все плоские углы при вершине *S* – прямые. Найдите целую часть длины отрезка *AM*, если *SA*=30, *SB*=60, *SC*=90, *M* – точка пересечения медиан грани *BCS*.

Ответ: 46. ***Решение:*** Введём систему координат, в которой S – начало координат, $A(30, 0, 0)$, $B(0, 60, 0)$, $C(0, 0, 90)$, тогда $M\ (0, 20, 30)$, т.к. её координаты равны трети от сумм координат вершин грани. Тогда $AM = \sqrt{(0-30)^2 + (20-0)^2 + (30-0)^2} = \sqrt{2200}$, а это число в пределах от 46 до 47.

3. На доске написано *N* единиц. За один ход можно стереть любое имеющееся на доске число и написать вместо него два новых числа, которые в два раза меньше его. При каком наименьшем *N* можно гарантировать, что в наборе в любой момент времени найдётся 100 равных чисел?

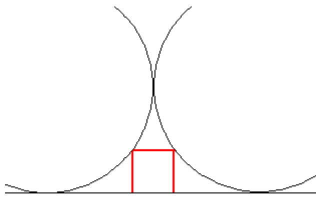
Ответ: 198. ***Решение:*** При $N \le 99$ уже не соблюдается условие про 100 равных чисел. Допустим, что $99 < N \le 197$. Приведём пример, когда нет 100 равных чисел. Для этого сохраним 99 единиц, а остальные $N–99$ единиц разделим пополам. Получится $2(N–99)$ чисел 1/2. 99 из них сохраним, оставшиеся $2N–3\cdot 99$ чисел снова поделим пополам и т.д. В некоторый момент после очередного деления пополам «половинок» окажется меньше 100 и мы получим искомый пример. Это случится, т.к. количество чисел, подлежащих делению пополам, с каждым шагом убывает, в силу цепочки неравенств $N–99>2N–3\cdot 99>4N–7\cdot 99>\ldots$, каждое из которых равносильно неравенству $N<198$, а у нас $99<N \le 197$.

Предположим, что есть такой набор чисел, в котором каждое число встречается не более 99 раз. Пусть самое маленькое число в нем равно 2^{-m}. Тогда сумма всех этих чисел не превосходит $N \le 99\cdot(2^{-m}+2^{-m+1}+\ldots+1)<99\cdot 2=198$. Значит, при $N \ge 198$ всегда найдётся число, которое встретится хотя бы 10 раз.

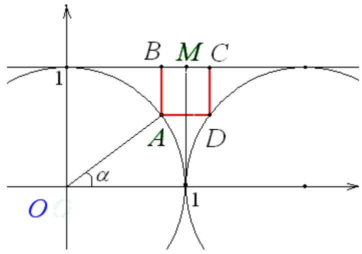
4. Назовём натуральное число *прогрессивным*, если в нём не менее трёх цифр и его цифры образуют (слева направо) арифметическую прогрессию (разность прогрессии может быть положительной, отрицательной или нулевой). Сколько прогрессивных чисел, меньших 10000?

Ответ: 75. ***Решение:*** Рассмотрим трёхзначные числа. Первую цифру можно выбрать 9 способами, последнюю – 5 способами, т. к. если первая цифра равна a, то последняя равна $a+2d$, т. е. $a+2d \equiv a \pmod 2$. Вторая цифра определяется однозначно. Итого 45 трёхзначных чисел. Рассмотрим четырёхзначные числа, у которых первая цифра кратна 3. Их 3·4=12, т. к. если первая цифра равна a, кратной 3, то последняя – a+3d, тогда $a \equiv a+3d$ (mod 3). Аналогично рассуждая, получим, что остальных чисел – 6·3=18. Значит, нужных нам чисел 45+12+18=75.

5. Квадрат площади 4 вписан в криволинейный треугольник, ограниченный дугами двух касающихся внешним образом окружностей радиуса *R* и их общей касательной (см. рис.). Найдите *R*.



Ответ: 5. ***Решение:*** Введём систему координат с началом координат в центре O одной из окружностей, ось «*ox*» направим в сторону центра второй окружности, тогда точка касания окружностей имеет координаты (R;0), точка касания первой окружности и прямой – (0;R), а вершина квадрата A, лежащая на первой окружности, – ($R\cos\alpha$; $R\sin\alpha$), где $0<\alpha<\pi/2$. Тогда сторона квадрата AB равна двум длинам отрезка BM, где M (R; R) – середина стороны BC квадрата (см. рис.), что даёт нам уравнение $1-\sin\alpha=2(1-\cos\alpha)$, из которого $\sin\alpha=2\cos\alpha-1$. Возводим в квадрат и получаем, что $1-\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1$, откуда находим при условии $\cos\alpha>0$, что $\cos\alpha=4/5$. Значит, сторона квадрата равна $2R/5$, а его площадь равна $4R^2/25=4$, откуда $R=5$.



6. При каком натуральном *n* наименьшее значение произведения $(1+x)(1+ny)(1+n^2z)$ равно 1000000, если *x*, *y* и *z* – положительные числа, произведение которых равно 1?

Ответ: 99. ***Решение 1:*** $(1+x)(1+ny)(1+n^2z) = 1+x+ny+n^2z+nxy+n^2zx+n^3yz+n^3xyz \geq 1+3n+3n^2+n^3 = (n+1)^3=1000000$, поскольку в силу неравенства Коши $x+ny+n^2z \geq 3\sqrt[3]{x\cdot ny\cdot n^2z} = 3n$ и $nxy+n^2zx+n^3yz \geq 3\sqrt[3]{nxy\cdot n^2zx\cdot n^3yz} = 3n^2$. Тогда $n=99$ – единственный корень уравнения $(n+1)^3= 1000000$, при этом значение 1000000 достигается при $x=99$, $y=1$, $z=1/99$. ***Решение 2:*** Сделаем замену переменных $x=a$, $ny=b$, $n^2z=c$. Тогда необходимо найти минимальное значение произведения $(1+a)(1+b)(1+c)$ при условии, что произведение положительных чисел a, b, c равно n^3. Здесь уже очевидным образом после раскрытия скобок применяем неравенство Коши для 8 положительных чисел.

7. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству $P(x)<100$, если для квадратного трехчлена $P(x)$ выполняется равенство $P(x)\cdot P(x-1)=P(x^2)$?

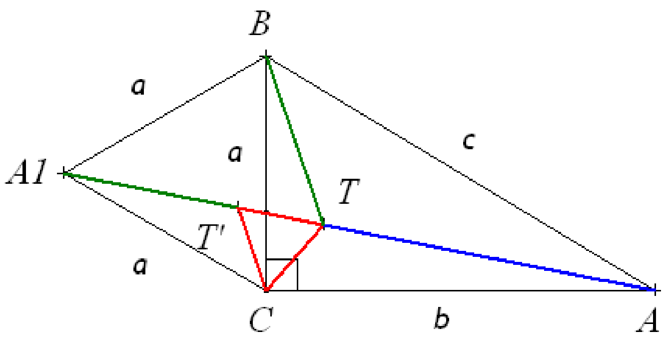
Ответ: 20. ***Решение:*** Запишем $P(x)=ax^2+bx+c$ с неизвестными коэффициентами a, b, c и подставим в наше равенство. Получим пять уравнений на a, b, c, которые имеют единственное решение $a=b=c=1$ (сначала из сравнения коэффициентов при x^4 получим $a=1$, затем из сравнения коэффициентов при x^3 получим $b=1$, и далее из сравнения свободных членов $c=1$ или $c=0$). При проверке подходит только $c=1$. Решим теперь неравенство $x^2+x+1<100$, Ему удовлетворяют целые числа в переделах от (–10) до 9 – всего 20 целых чисел.

8. Найдите наименьшее целочисленное значение параметра *a*, при котором функция $f(x)=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$ является возрастающей на всей числовой оси и не имеет критических точек?

Ответ: 7. ***Решение:*** Функция $f(x)$ дифференцируема при любом значении a, её производная $f'(x)=8a-6a\cos 6x-7-5\cos 5x$. Теперь задачу можно переформулировать так: при каких a неравенство $6a\cos 6x+5\cos 5x<8a-7$ справедливо для любого x? Т.к. последнее неравенство должно выполняться для любого значения x, оно должно быть справедливо и для $x=0$, откуда $6a+5<8a-7$ или $a>6$. Учитывая теперь, что $6a\cos 6x+5\cos 5x\le 6|a|+5<8a-7$, приходим к выводу, что при $a>6$ неравенство справедливо для любого x.

9. Найдите квадрат минимальной суммы расстояний до вершин от точки внутри треугольника со сторонами $\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ \sqrt{8}$.

Ответ: 14. ***Решение***: Исходный треугольник является прямоугольным с катетами $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{6}$ и гипотенузой $c=\sqrt{8}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}$. Нужная нам точка с минимальной суммой расстояний будет точкой Торричелли. В силу её свойств минимальная сумма расстояний до вершин равна расстоянию от любой вершины треугольника до третьей вершины внешней надстройки (правильного треугольника) на противоположной стороне. В частности,



равна расстоянию AA_1 (см. рис.). Этот факт доказывается поворотом на 60° вокруг вершины треугольника: $AT+CT+BT=AT+TT'+T'A_1\ge AA_1$, значит, точки T и T' должны лежать на отрезке AA_1. В треугольнике ACA_1 угол между сторонами $A_1C=a$ и $AC=b$ равен $90°+60°=150°$, тогда по теореме косинусов

$$AA_1^2=a^2+b^2-2ab\cos 150°=a^2+b^2+\sqrt{3}ab=2+6+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=14.$$

10. Город имеет форму клетчатого прямоугольника, клетки – кварталы, линии сетки – улицы. В городе есть патрульная машина, которая каждую ночь паркуется на одном и том же перекрестке, а каждый день должна проехать один раз по замкнутому маршруту, непроходящему дважды через одну точку (кроме начальной и конечной) и содержащему ровно 20 правых поворотов. Назовём число *левым,* если именно столько левых поворотов может совершить за день патрульная машина. Найдите сумму всех *левых* чисел.

Ответ: 120. ***Решение:*** Машина проехала по контуру многоугольника, и потому либо сделала один оборот вокруг своей оси (4 «лишних» поворота в ту или другую сторону), либо (если она начинала в угловой точке) на четверть оборота больше или меньше, т.е. левыми числами будут 15, 16, 17, 23, 24, 25, их сумма равна $6\cdot 20=120$.