



Высшая  
проба

ВСЕРОССИЙСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ, ПЕРЕЧЕНЬ И СОДЕРЖАНИЕ  
ТЕМ И ЛИТЕРАТУРА**

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»  
по профилю «Математика»

2022/2023 уч. г.



**ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада «Высшая проба» проводится в два этапа.

Первый этап является отборочным. Его результат, если он привел к прохождению на второй этап, далее не учитывается. Он проводится в дистанционном формате с автоматизированной проверкой ответов. Запись решений не предполагается.

Второй этап является заключительным, именно по его результатам определяются победители и призеры. По формату второй этап – классическая письменная олимпиада с полноценным оформлением и последующей проверкой решений. Часть задач – задачи на вычисление каких-то элементов, часть – задачи на доказательство различных утверждений, а часть задач содержит в себе и первое и второе.

Как и любая олимпиада высокого уровня, «Высшая проба» требует от участников не столько специфических знаний, сколько умения изобретательно применять и комбинировать знания, полученные во время основных школьных занятий, а также дополнительных занятий в формате очных кружков, дистанционных курсов или самостоятельной работы с литературой. Простого алгоритма, как развить в себе такие умения и тем самым подготовиться к олимпиаде, нет, но она и олимпиада, но хорошее освоение школьной программы, дополнительные занятия математикой, самостоятельная работа и опыт участия в других олимпиадах, конечно, помогают.

Подчеркнем, что вариант олимпиады направлен не на непосредственную проверку знания формулировок определений, теорем и подобного, а состоит из математических задач, которые требуется решить. А для того, чтобы подготовиться к решению задач, нужно решать задачи. Рекомендуем обратить особое внимание на сборники задач и на варианты различных олимпиад сопоставимого уровня, в частности, на этапы Всероссийской олимпиады школьников, на международную олимпиаду «Турнир городов», на Московскую и Санкт–Петербургскую математические олимпиады.

Приведем список тем и умений, на который рекомендуем обратить внимание в процессе подготовки. Список не является полным перечислением всего, что может быть, а акцентирует внимание на наиболее важных для подготовки темах и методах, находящихся на границе школьной программы. Подразумевается, что основную школьную программу участник и так знает в достаточной степени. В связи с тем, что одни и те же методы и темы, но на разном уровне сложности, встречаются в олимпиадах разных классов, и для формирования более полной картины, мы не стали разбивать список на классы. Рекомендуем ориентироваться на школьную программу, включая материал дополнительных глав учебников, на литературу, перечисленную ниже и на варианты прошлых лет олимпиад, перечисленных выше. Полный перечень тем олимпиады с указанием их содержания можно найти по [ссылке](#).

## Общая математическая культура

- Умение ясно формулировать определения, леммы и теоремы, используемые при решении задачи.

- Умение корректно формулировать отрицания данных утверждений, утверждения эквивалентные данным, утверждения, являющиеся следствиями данных.
- Понимание того, что является, а что не является корректным и полным математическим доказательством.
- Знание основных типов вопросов в задачах и умение понимать, что в них требуется в качестве решения. Например, понимание того, что задача с формулировкой “можно ли”, как правило, требует или контрпримера, в одном случае, или доказательства в другом. Или понимание того, что ответ на вопрос про наибольшее или наименьшее возможное количество, как правило, состоит из двух частей – примера для искомого количества и доказательства того, что большим (меньшим) обойтись нельзя.

## Комбинаторика и логика

- Полный перебор, грамотная организация перебора.
- Идея упорядочивания в комбинаторных и алгебраических задачах.
- Решения задач от противного и принцип Дирихле.
- Принцип крайнего.
- Круги Эйлера и формула включений-исключений.
- Логические задачи. Анализ истинных и ложных высказываний. Таблицы истинности. Задачи про рыцарей и лжецов. Задачи про мудрецов.
- Четность: арифметика, разбиение на пары, чередование.
- Процессы: инварианты и полуинварианты, зацикливание, дискретная непрерывность.
- Алгоритмы и конструктивы: переправы, переливания. Взвешивания и теория информации.
- Метод математической индукции: задачи на постепенное конструирование, применение при решении задач разной природы: алгебра, комбинаторика, геометрия.
- Подсчет числа способов. Задачи на соответствия. Правила сложения и умножения. Факториал. Числа сочетаний, бином Ньютона и треугольник Паскаля. Алгебраические тождества с числами сочетаний и их комбинаторный смысл. Метод “шаров и перегородок”. Рекуррентные соотношения, производящие функции, числа Фибоначчи, числа Каталана.
- Игры: симметричные стратегии, выигрышные и проигрышные позиции, передача хода.
- Теория графов. Перевод условия задачи на язык графов. Лемма о рукопожатиях. Связность. Двудольные графы и подсчет двумя способами. Деревья. Эйлеровы и гамильтоновы пути и циклы в графах. Раскраски графов. Планарные графы и формула Эйлера. Ориентированные графы.

## Алгебра и теория чисел

- Алгебраические преобразования и формулы сокращенного умножения.
- Текстовые задачи: движение по прямой и по кругу, задачи на работу, сплав и смеси.

- Десятичная запись числа и признаки делимости. Разложение числа на простые множители. Основная теорема арифметики. НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД. Линейные диофантовы уравнения.
- Арифметика остатков, сравнения по модулю. Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона. Китайская теорема об остатках. Теорема Эйлера. Уравнения в целых числах.
- Работа с иррациональными числами.
- Системы счисления.
- Неравенства. Неравенства о средних. Транснеравенство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Метод Штурма. Неравенство Йенсена.
- Квадратный трехчлен: формулы корней, теорема Виета, график и его свойства.
- Многочлены: алгебра многочленов, теорема Безу, теорема о рациональных корнях, теорема Виета. Разложение многочлена на неприводимые. Интерполяционный многочлен.
- Перестановки. Умножение перестановок. Разложение в независимые циклы и порядок перестановки. Сортировки и разложение в произведение транспозиций. Четность перестановки.
- Линейная алгебра. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
- Функциональные уравнения и неравенства.

## Геометрия

- Четвертый признак “равенства” треугольников.
- Дополнительные построения, связанные с осевой и центральной симметрией. Перекладывание отрезков. Удвоение медианы.
- Неравенство о соотношении углов и сторон в треугольнике. Неравенство треугольника.
- Параллелограмм Вариньона.
- Теоремы Чевы и Менелая.
- Вписанные и невписанные окружности. Точки Жергона и Нагеля.
- Окружность девяти точек и прямая Эйлера.
- Вписанные углы, угол между касательной и хордой. Вписанные четырехугольники и вспомогательные окружности. Ортотреугольник и отражения ортоцентра. Лемма Фусса. Прямая Симсона. Середины дуг: лемма Архимеда и лемма о трезубце.
- Отрезки касательных и описанные четырехугольники.
- Пропорциональные отрезки, связанные с окружностью. Степень точки относительно окружности, радикальная ось, радикальный центр.
- Движения плоскости: классификация, композиция движений, применение при решении задач.
- Преобразования плоскости: гомотетия, поворотная гомотетия, изогональное сопряжение.
- Триангуляция многоугольника.
- Многоугольники на решетке. Формула Пика.
- Стереометрические задачи. Равногранные и ортоцентрические тетраэдры.

Приведем список литературы и ресурсов в сети Internet, которые могут быть полезны в процессе подготовки. Хороших книг и отличных сайтов много, но мы предпочли сделать

наш список как можно более компактным, чтобы он служил ориентиром того, на что, на наш взгляд, следует обратить внимание в первую очередь. Для того, чтобы сформировалась более цельная картина, мы не стали разбивать список на классы. Все ресурсы содержат адекватные описания, у вас не вызовет затруднения, изучая соответствующие материалы, понять целевую аудиторию конкретных мероприятий, курсов, литературы.

## Информационные ресурсы и сайты олимпиад

- [olimpiada.ru](http://olimpiada.ru) – крупнейший информационный портал об олимпиадах в России
- [vos.olimpiada.ru](http://vos.olimpiada.ru) – сайт с информацией об этапах Всероссийской олимпиады школьников в городе Москве
- [siriusolymp.ru](http://siriusolymp.ru) – сайт школьного этапа Всероссийской олимпиады, проводимого Образовательным центром «Сириус»
- [rsr-olymp.ru](http://rsr-olymp.ru) – сайт Российского совета олимпиад школьников
- [mccme.ru](http://mccme.ru) – сайт Московского центра непрерывного математического образования
- [turgor.ru](http://turgor.ru) – сайт Международного математического «Турнира городов»
- [olympiads.mccme.ru/matprazdnik](http://olympiads.mccme.ru/matprazdnik) – сайт «Математического праздника» для 6 и 7 классов
- [mmo.mccme.ru](http://mmo.mccme.ru) – сайт Московской математической олимпиады
- [olymp.hse.ru/mmo](http://olymp.hse.ru/mmo) – сайт олимпиады «Высшая проба»
- [www.etudes.ru](http://www.etudes.ru) – сайт проекта «Математические этюды»

## Дистанционные курсы

- [edu.sirius.online](http://edu.sirius.online) – бесплатные онлайн-курсы Образовательного центра «Сириус»

## Базы задач

- [problems.ru](http://problems.ru) – база задач с решениями, каталогизацией и поиском.
- [zadachi.mccme.ru](http://zadachi.mccme.ru) – информационно-поисковая система «Задачи по геометрии»

## Интернет–библиотеки

- [ilib.mccme.ru](http://ilib.mccme.ru) и [mccme.ru/free-books](http://mccme.ru/free-books) – библиотеки математической литературы. Ряд книг, перечисленных ниже, доступны бесплатно на этих ресурсах

## Печатная учебная литература

- Серия книг «Школьные математические кружки»
- Сайт журнала «Квантик»  
[kvantik.com](http://kvantik.com)
- Архив номеров журнала «Квант»  
[kvant.mccme.ru](http://kvant.mccme.ru)
- Р. К. Гордин. Это должен знать каждый матшкольник.  
[mccme.ru/free-books/pdf/gordin.pdf](http://mccme.ru/free-books/pdf/gordin.pdf)

- А. Канель, А. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи  
[mccme.ru/free-books/olymp/KanKov.pdf](http://mccme.ru/free-books/olymp/KanKov.pdf)
- «Ленинградские математические кружки» С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин
- Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел для математических школ  
[mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf](http://mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf)
- В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии  
[mccme.ru/free-books/prasolov/planim5.pdf](http://mccme.ru/free-books/prasolov/planim5.pdf)
- В. В. Прасолов. Задачи по стереометрии
- В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу  
[mccme.ru/free-books/prasolov/algebra.pdf](http://mccme.ru/free-books/prasolov/algebra.pdf)
- В. В. Прасолов. Многочлены  
[www.mccme.ru/free-books/prasolov/poly.pdf](http://www.mccme.ru/free-books/prasolov/poly.pdf)
- А. В. Акопян. Геометрия в картинках  
[mccme.ru/free-books/akopyan/Akopyan.pdf](http://mccme.ru/free-books/akopyan/Akopyan.pdf)
- Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин Комбинаторика

## Печатные сборники задач наиболее авторитетных математических олимпиад

- Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009  
Заключительные этапы.
- В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1935-1957  
[mccme.ru/free-books/olymp/mmo-35-57.pdf](http://mccme.ru/free-books/olymp/mmo-35-57.pdf)
- В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1958-1967
- А. В. Бегунц и др. Московские математические олимпиады 1981-1992
- Р. М. Федоров и др. Московские математические олимпиады 1993-2005  
[mccme.ru/free-books/olymp/mmo1993.pdf](http://mccme.ru/free-books/olymp/mmo1993.pdf)
- Л. Э. Медников, А. В. Шаповалов Турнир городов: мир математики в задачах
- А. К. Толпыго Тысяча задач Международного математического Турнира городов
- Д. В. Фомин, К. П. Кохась Ленинградские математические олимпиады 1961-1991
- Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. Серия книг с 2012 по 2021 годы.