Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Демонстрационный вариант.

7 класс. Решения задач

3 октября 2022 г.

Задача 7.1. Денис загадал четырёхзначное число, в котором

- все цифры различны и идут слева направо в порядке возрастания;
- цифра разряда единиц больше цифры разряда десятков на 6.

Какое число загадал Денис?

Ответ: 1239.

Решение. Первая цифра числа не может быть равна 0, она не меньше 1. Поскольку цифры возрастают, вторая цифра не меньше 2, а третья не меньше 3. Четвёртая цифра на 6 больше третьей, поэтому она не меньше $3 + 6 = 9$. Такое возможно, только если четвёртая цифра равна 9, тогда третья цифра равна 3. Тогда вторая цифра равна 2, а первая равна 1. Следовательно, искомое число равно 1239. □

Задача 7.2. На доске нарисована клетчатая таблица, состоящая из двух столбцов и трёх строк. Андрей вписал в клетки первого столбца три числа: 18, 30 и 35. Затем Борис вписал в клетки второго столбца три простых числа так, что сумма чисел во всех трёх строках оказалась одинаковой. Какое число стоит в одной строке с 18?

Ответ: 19.

18	p
30	q
35	r

Решение. Обозначим простые числа во втором столбце через p, q, r. По условию

$$p + 18 = q + 30 = r + 35.$$

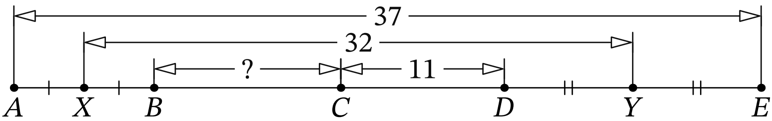
Из этого соотношения следует, что числа p и q одной чётности (и различны), а число r — другой чётности. Но среди простых чисел есть только одно чётное: число 2. Следовательно, такое возможно, только если $r = 2$, откуда $p = r+35-18 = 19$ и $q = r+35-30 = 7$. □

Задача 7.3. На прямой отмечены точки A, X, B, C, D, Y, E именно в таком порядке. Известно, что

- $AX = XB$;
- $DY = YE$;
- $AE = 37, XY = 32, CD = 11$.

Найдите длину отрезка BC.

Ответ: 16.



Решение. Отрезок AE состоит из отрезков AX, XY, YE, поэтому

$$37 = AE = AX + XY + YE = AX + 32 + YE \Longrightarrow AX + YE = 5.$$

Аналогично отрезок XY состоит из отрезков XB, BD, DY, и тогда

$$32 = XY = XB + BD + DY = AX + BD + YE = BD + 5 \Longrightarrow BD = 27.$$

Поскольку $BD = 27$ и $CD = 11$, то $BC = BD - CD = 16$. □

Задача 7.4. По кругу выписаны 2022 целых числа, среди которых есть число 1. Известно, что сумма любых 10 последовательных чисел равна 140. Найдите сумму двух чисел, соседних с числом 1.

Ответ: 54.

Решение. Для удобства будем считать, что все числа расположены на окружности длины 2022, а длины дуг между соседними числами равны 1. Под расстоянием между числами будем иметь в виду длины соединяющих их дуг.

Рассмотрим произвольные 11 последовательных чисел на окружности. По условию суммы первых десяти и последних десяти из этих одиннадцати равны. Но в обе суммы входят средние девять чисел; значит, крайние из этих одиннадцати чисел равны. Таким образом, любые два числа на окружности на расстоянии 10 (т. е. между которыми стоит 9 других чисел) равны.

Ясно, что числа в концах любой дуги, длина которой кратна 10, тоже равны, поскольку эта дуга может быть разбита на дуги длины 10, числа в концах каждой из которых равны.

Рассмотрим теперь любые два числа на расстоянии 2 (т. е. между которыми стоит одно число). Длина противоположной дуги, соединяющей эти два числа, равна $2022-2 = 2020$, что кратно 10. Следовательно, любые два числа на расстоянии 2 равны. Иными словами, все числа на чётных позициях равны между собой и все числа на нечётных позициях тоже равны между собой.

Без ограничения общности, на чётных позициях стоит значение 1. Значение на нечётных позициях обозначим через s. Тогда сумма 10 подряд идущих чисел равна

$$1+s+1+s+1+s+1+s+1+s = 5+5s = 140,$$

откуда $s = (140-5)/5 = 27$. Рядом с числом 1 стоят два числа 27, и их сумма равна 54. $\square$

Задача 7.5. Петя выбрал несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 2022. Известно, что ни одно из этих чисел не делится ни на какое другое. Какое наибольшее количество чисел мог выбрать Петя?

Ответ: 1011.

Решение. Петя мог выбрать 1011 чисел так: $1012, 1013, 1014, \ldots, 2022$. Для любых двух из этих чисел отношение большего к меньшему больше 1 и меньше 2, поэтому не может быть целым числом. Следовательно, эти числа удовлетворяют условию.

Теперь докажем, что если бы Петя выбрал не менее 1012 чисел, то среди них бы нашлись два, одно из которых делится на другое.

Любое выбранное число n единственным образом можно представить в виде $2^k \cdot m$, где m — нечётное число, а k — целое неотрицательное. Будем называть *m нечётной частью* числа n. По сути, нечётная часть числа n — это произведение всех нечётных простых множителей из разложения числа n (а если их нет, то нечётная часть равна 1).

Заметим, что нечётная часть любого выбранного числа не превосходит самого числа, а значит она может принимать значения $\{1, 3, 5, \ldots, 2019, 2021\}$ — всего 1011 допустимых значений. Если бы Петя выбрал не менее 1012 чисел, то среди выбранных нашлись бы два с одинаковой нечётной частью: $2^k \cdot m$ и $2^l \cdot m$. Не умаляя общности, $k \geqslant l$, тогда отношение этих чисел $\frac{2^k \cdot m}{2^l \cdot m} = 2^{k-l}$ — целое, и $2^k \cdot m$ делится на $2^l \cdot m$. Противоречие. $\square$

Задача 7.6. По кругу стоят 10 игроков, у каждого из них есть карточки с числами от 1 до 10 (всего у них суммарно 100 карточек). Игроки ходят по очереди по часовой стрелке, начиная с первого. За один ход игрок может сделать одно из двух действий:

- отдать любую свою карточку любому другому игроку, которому раньше ещё ничего не отдавал;

- сбросить из игры две свои карточки с одинаковыми числами.

Если какой-то игрок не может сделать ход, игра заканчивается. Какое наибольшее число ходов может продолжаться эта игра?

Ответ: 140.

Решение. Докажем, что ходов не более 140.

Всего в игре участвуют 100 карточек, за одно сбрасывание из игры выбывают две карточки; число ходов, в которые происходило сбрасывание, не превосходит 50.

По условию каждый игрок может совершить не более одной передачи карточки другому игроку. Получается, что каждый игрок передаёт карточку не более 9 раз, а значит всего передач не больше $10 \cdot 9 = 90$.

Таким образом, общее число ходов не превосходит суммы количеств ходов с передачей и со сбрасыванием, то есть не больше $90 + 50 = 140$.

Покажем, что игра могла длиться ровно 140 ходов.

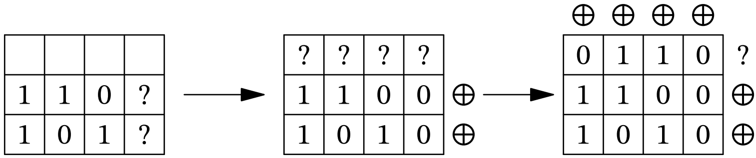
Пронумеруем игроков числами от 1 до 10. Стратегия будет следующей: каждый игрок первые 9 своих ходов будет отдавать одну из своих изначальных карточек тому игроку, номер которого совпадает с числом на карточке. В результате после 90 ходов у каждого игрока будет по 10 одинаковых карточек, числа на которых равны номеру игрока (одна изначальная и девять, полученных от других игроков). Далее каждый игрок совершает по 5 сбрасываний, суммарно 50 ходов. Общее число ходов равно $90 + 50 = 140$. □

Задача 7.7. Сколько существует способов расставить нули и единицы в клетки таблицы 3×4 так, чтобы

- в каждой клетке стояла ровно одна цифра;
- сумма цифр в каждой строке и в каждом столбце была чётной?

(Не обязательно использовать обе цифры: например, таблица, целиком заполненная нулями, удовлетворяет условию.)

Ответ: 64.



Решение. Выделим в левом нижнем углу прямоугольник 2×3 и заполним клетки этого прямоугольника произвольно. Для каждой из шести клеток есть два варианта заполнения, поэтому всего способов заполнить прямоугольник $2^6 = 64$.

Докажем, что для каждого заполнения прямоугольника 2×3 существует единственный способ дописать числа в незаполненные клетки, в котором выполнены все условия задачи.

Сначала однозначно восстановим числа в пустых клетках в двух нижних строках: в каждой из строк известны три числа и чётность суммы, поэтому однозначно восстанавливается четвёртое число.

Теперь в каждом столбце заполнены две клетки из трёх, и аналогично однозначно восстанавливается число в третьей клетке.

На текущий момент все числа расставлены так, что суммы в двух нижних строках и во всех столбцах чётные. Осталось проверить, что сумма в верхней строке тоже чётная.

Рассмотрим сумму всех чисел в таблице. С одной стороны, эта сумма равна сумме сумм по всем четырём столбцам, то есть чётному числу. С другой стороны, сумма всех чисел в таблице равна сумме сумм по трём строкам, про две из которых мы знаем, что они чётные. Тогда и сумма в третьей строке чётная. $\square$

Задача 7.8. В компании 32 человека. Оказалось, что любые 30 из них можно разбить на 15 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

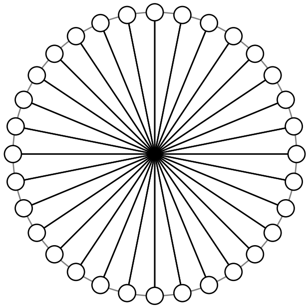
Ответ: 48.

Решение. Предположим, что у какого-то человека X не более двух знакомых. Тогда существует группа из 30 человек, содержащая X и не содержащая его знакомых. Поскольку в этой группе X никого не знает, разбить её на пары знакомых не получится. Следовательно, у каждого человека в компании не меньше 3 знакомых.

Спросим у каждого члена компании, сколько у него знакомых, и сложим полученные ответы. С одной стороны, получится не менее $3 \cdot 32 = 96$, так как каждый знаком не менее с 3 людьми. С другой стороны, рассматриваемая сумма есть удвоенное количество знакомств, поскольку каждое знакомство в ней учтено ровно два раза: при опросе одного из пары знакомых и при опросе второго. Следовательно, знакомств не меньше $96/2 = 48$.

Теперь предъявим пример возможной компании, в которой ровно 48 пар знакомых.

Расставим всех людей по кругу. Объявим знакомыми пары соседей, а также пары диаметрально противоположных людей. Несложно видеть, что получится в точности 48 пар знакомых. Докажем, что условие задачи в приведённом примере выполнено.

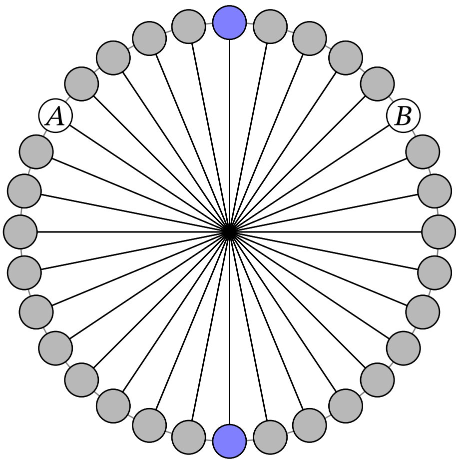


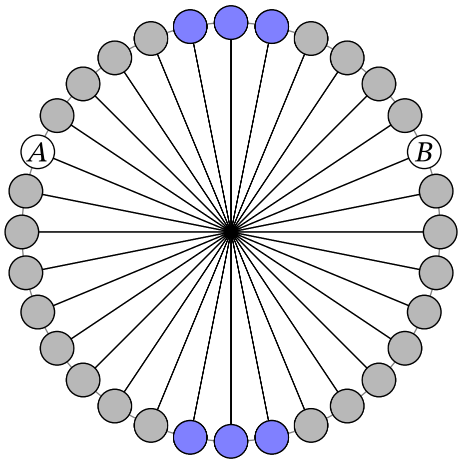
Рассмотрим произвольные 30 человек; обозначим двух остальных через A и B. Рассмотрим количества людей, которые стоят на обеих дугах между A и B (суммарно 30). Есть три случая:

(1) на одной из дуг между A и B чётное число людей. Тогда и на второй дуге чётное число людей. В этом случае на каждой дуге отдельно разбиваем людей на пары соседей.

(2) на одной из дуг между A и B нечётное число людей, причём число вида $4k+1$. Тогда и на второй дуге $4m+1$ людей ($k+m=7$). Соединим центральных людей каждой из дуг в пару, остальных 28 разобьём на пары соседей.

(3) на одной из дуг между A и B нечётное число людей, причём число вида $4k+3$. Тогда и на второй дуге $4m+3$ людей ($k+m=6$). На каждой дуге выделим трёх центральных людей, разобьём их на три пары диаметрально противоположных, а остальных 24 разобьём на пары соседей.





□