Высшая проба

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»
по профилю «Математика» для 7 класса

2022/2023 уч. г.

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада «Высшая проба». Математика.

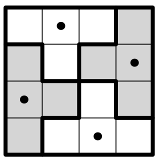
Заключительный тур, демонстрационный вариант. 7 класс. Решения задач

Балл за верное решение каждой задачи, то есть полное обоснование ответа (или доказательство), указан после номера каждой задачи в скобках. Частичные продвижения в решении задач могут оцениваться промежуточными баллами.

Задача 7.1. *(15 баллов)* В таблице 4×4 в каждой клетке стоит число 0. Вера за один ход может выбрать любую клетку и увеличить стоящее в ней число на 1, одновременно с этим увеличиваются на 1 и числа во всех клетках, соседних с выбранной по стороне. Может ли Вера несколькими такими операциями получить во всех клетках таблицы число 2022?

Ответ: да, может.

Решение. Заметим, что при прибавлении 1 к числам в клетках, отмеченных точками на картинке ниже, также 1 прибавляется и к числам в клетках в соответствующих областях, причём эти области не пересекаются. Тогда Вера может выбрать каждую из отмеченных клеток по 2022 раза и получить нужную расстановку.



□

Задача 7.2. *(15 баллов)* На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка E так, что $\angle AED = 90^\circ$. Оказалось, что DE — биссектриса угла ADC. Докажите, что $AE > EB$.

Решение. Треугольник ADE прямоугольный, поэтому $\angle ADE = \angle EDC$ — острые углы. Отсюда следует, что лучи DC и EB пересекаются. Обозначим точку их пересечения через U (рис. 1).

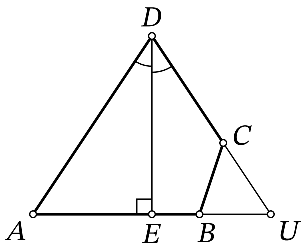


Рис. 1: к решению задачи 7.2

Треугольник ADU является равнобедренным, так как DE является его биссектрисой и высотой. Поэтому DE — ещё и медиана этого треугольника. Отсюда легко следует требуемое неравенство:

$$AE = UE = UB + EB > EB. \qquad \square$$

Задача 7.3. *(15 баллов)* У Маши и Пети есть по 5 карточек, на которых записано по одной цифре. На карточках Маши написаны только двойки и тройки, на карточках Пети — только тройки и четвёрки.

Маша и Петя составляют из своих карточек по пятизначному числу. Может ли произведение этих пятизначных чисел записываться одними двойками?

Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть число Маши равно A, а число Пети — B. По условию выполняются неравенства $20\,000 < A < 40\,000$, $30\,000 < B < 50\,000$. Отсюда $600\,000\,000 < AB < 2\,000\,000\,000$. Значит, первая цифра произведения AB никак не может быть двойкой, поэтому само оно записываться одними двойками не может. $\square$

Задача 7.4. *(15 баллов)* Друзья Андрей, Борис и Денис учатся в одном классе. Им всем нравится сидеть за первой партой центрального ряда. Каждый учебный день происходит следующее:

1. в начале дня двое из друзей занимают первую парту центрального ряда, и в течение дня много болтают друг с другом;
2. к концу дня классный руководитель запрещает одному из этих двоих оставаться за первой партой центрального ряда на весь следующий день.

Спустя несколько учебных дней оказалось, что Борис сидел за первой партой центрального ряда ровно 31 день, а Денис — ровно 15 дней. Сколько дней сидел за первой партой центрального ряда Андрей?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что какие бы два подряд идущих учебных дня мы ни рассмотрели, Денис хотя бы в один из них сидит за первой партой.

Так как всего Денис сидел за первой партой 15 дней, то общее число учебных дней не превосходит $15 \cdot 2 + 1 = 31$. В то же время Борис сидел за первой партой 31 день, а значит, учебных дней было в точности 31, и в каждый из них Борис сидел за первой партой. Таким образом, Андрей сидел за первой партой оставшиеся $31 - 15 = 16$ дней. $\square$

Задача 7.5. *(20 баллов)* Различные простые числа a, b, c, d таковы, что

$$\begin{cases} ab + cd = 121, \\ bc + ad = 89. \end{cases}$$

Чему может быть равно $a + b + c + d$?

Ответ: 47.

Решение. Все числа a, b, c, d не могут быть нечётными, иначе выражение $ab + cd$ равнялось бы чётному числу. Без ограничения общности можно считать, что a — чётное число, а раз оно ещё и простое, то $a = 2$. Поскольку все четыре числа различны, числа b, c, d — простые нечётные.

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} 2b + cd = 121, \\ bc + 2d = 89. \end{cases}$$

Вычтем из одного уравнения другое, получим

$$32 = 121 - 89 = (2b + cd) - (bc + 2d) = (d - b)(c - 2).$$

Число $c - 2$ нечётное неотрицательное, являющееся делителем 32, поэтому $c = 3$. Тогда $32 = (d - b)(3 - 2) = d - b$, откуда $d = b + 32$.

Подставляя всё это в первое уравнение, получаем

$$121 = 2b + 3d = 2b + 3(b + 32) = 5b + 96.$$

Решая это линейное уравнение, находим $b = 5$, тогда $d = 5 + 32 = 37$.

Легко видеть, что четвёрка чисел $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 37$ удовлетворяет условию задачи, и их сумма равна $2 + 5 + 3 + 37 = 47$. $\square$

Задача 7.6. *(20 баллов)* Столбцы белой клетчатой таблицы 11×11 пронумерованы слева направо числами от 1 до 11. Найдите количество способов закрасить в этой таблице 66 клеток так, чтобы выполнялись следующие условия:

- в одном столбце закрашена 1 нижняя клетка, ещё в одном — 2 нижние клетки, ещё в одном — 3 нижние клетки, ..., ещё в одном — 11 нижних клеток;

- ровно в одном столбце закрашенных клеток больше, чем его номер.

Ответ: $2^{11} - 11$.

Решение. Пусть в столбце номер n закрашено $k > n$ клеток.

Посмотрим на столбцы с бо́льшим количеством закрашенных клеток:

- 11 клеток могут быть закрашены только в столбце номер 11 (если $k < 11$);
- 10 клеток могут быть закрашены только в столбце номер 10 (если $k < 10$);
- …
- $k + 1$ клетка может быть закрашена только в столбце номер $k + 1$.

И посмотрим на столбцы с маленькими номерами:

- в столбце номер 1 может быть закрашена только 1 клетка (если $n > 1$);
- в столбце номер 2 могут быть закрашены только 2 клетки (если $n > 2$);
- …
- в столбце номер $n - 1$ может быть закрашена только $n - 1$ клетка.

Осталось разобраться, сколько клеток закрашено в столбцах с номерами от $n + 1$ до k:

- в столбце номер $n + 1$ может быть закрашено либо n, либо $n + 1$ клеток;
- в столбце номер $n + 2$ может быть закрашено либо $n + 2$ клетки, либо то количество клеток, которое ещё не было задействовано на предыдущем ходу;
- …
- в столбце номер k может быть закрашено то количество клеток, которое ещё не было задействовано на предыдущем ходу.

Получается, что для каждого из столбцов от $n + 1$ до $k - 1$ есть два варианта раскраски, то есть для данных n и k есть ровно 2^{k-n-1} способов закрасить 66 клеток.

Если $n = 1$, то k пробегает значения от 2 до 11, то есть общее количество способов равно

$$2^0 + 2^1 + \ldots 2^9 = 2^{10} - 1.$$

Если $n = 2$, то k пробегает значения от 3 до 11, то есть общее количество способов равно

$$2^0 + 2^1 + \ldots 2^8 = 2^9 - 1.$$

…

Если $n = 10$, то $k = 11$, то есть общее количество способов равно

$$2^0 = 2^1 - 1.$$

Просуммировав все эти выражения, получаем ответ:

$$(2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \ldots + (2^{10} - 1) = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{10} - 10 = 2^{11} - 11. \qquad \square$$