Высшая проба

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»
по профилю «Математика» для 8 класса

2022/2023 уч. г.

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

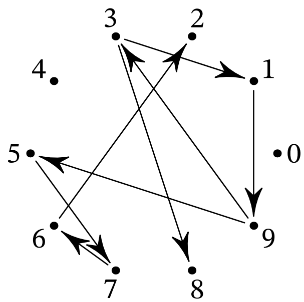
Олимпиада «Высшая проба». Математика. Заключительный тур, демонстрационный вариант. 8 класс. Решения задач

Балл за верное решение каждой задачи, то есть полное обоснование ответа (или доказательство), указан после номера каждой задачи в скобках. Частичные продвижения в решении задач могут оцениваться промежуточными баллами.

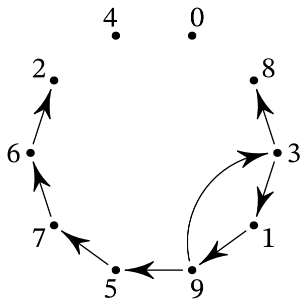
Задача 8.1. *(15 баллов)* На доске написано натуральное число, все цифры которого различны. Любые две его соседние цифры образуют двузначное число, которое делится на 19 или на 31. Какое наибольшее число может быть записано на доске?

Ответ: 3195762.

Решение. Нарисуем диаграмму, на которой отметим все цифры точками и соединим две цифры стрелочкой, если они образуют число, кратное 19 или 31. Например, число 62 делится на 31, поэтому проведём стрелочку $6 \to 2$:



Если некоторое число удовлетворяет условию, то его цифры должны быть последовательно соединены стрелочками. По сути, нам в этой диаграмме нужно найти самый длинный путь по стрелочкам, не проходящий ни по какой цифре дважды. Перерисуем диаграмму, чтобы структура стала понятнее:



Ясно, что если в числе нет пары цифр 95, то там может быть не более 4 цифр; а если эта пара есть, то она продолжается вперёд и назад по стрелочкам единственным образом. Получается, что число с наибольшим количеством цифр — это 3195762, оно же и наибольшее по величине. □

Задача 8.2. *(15 баллов)* Различные действительные числа a, b, c таковы, что

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{и} \quad b^2 = (a+c)^2.$$

Чему может быть равно $a + b + c$?

Ответ: 0.

Решение. Подставим выражение для b^2, данное вторым равенством, в первое. Получаем

$$\begin{aligned} a^2 &= (a+c)^2 + c^2 \quad \Rightarrow \\ a^2 &= a^2 + 2ac + 2c^2 \quad \Rightarrow \\ 0 &= 2c(a+c). \end{aligned}$$

Это означает, что либо $c = 0$, либо $a + c = 0$.

В случае $c = 0$ из первого уравнения получаем, что $a^2 = b^2$. Так как числа a и b различны, то $a = -b$. Получаем $a + b + c = 0$.

В случае $a+c = 0$ из второго уравнения получаем, что $b^2 = 0$, и тогда тоже $a+b+c = 0$. □

Задача 8.3. *(15 баллов)* В компании людей каждые двое либо дружат, либо враждуют, либо безразличны друг другу. У каждого из них есть хотя бы один друг и хотя бы один враг. Все они живут по принципу «Друг моего врага — мой враг» (то есть если люди A и B враждуют, а B и C дружат, то A и C обязательно враждуют). Докажите, что хотя бы у одного человека в компании врагов больше, чем друзей.

Решение. Предположим, у каждого человека врагов не больше, чем друзей. Рассмотрим человека X, у которого больше всего врагов. Количество врагов у X обозначим через k; выберем произвольного из них и назовём Y.

По предположению друзей у X хотя бы k. Исходя из принципа «Друг моего врага — мой враг», каждый друг X является врагом для Y. Но тогда у Y врагов не менее $k+1$, т. е. больше, чем у X. Противоречие. □

Задача 8.4. *(15 баллов)* Трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) такова, что $BC < AD$. Внутри трапеции отмечена точка X, а снаружи трапеции отмечены точки Y и Z так, что четырёхугольники $ABXY$ и $CDZX$ являются параллелограммами. Докажите, что $YZ = AD - BC$.

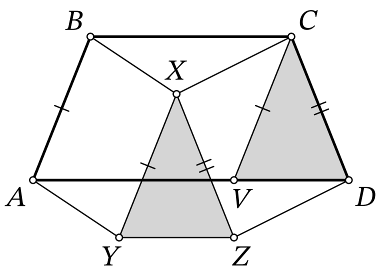


Рис. 1: к решению задачи 8.4

Решение. Отметим на стороне AD такую точку V, что $AV = BC$ (рис. 1; такая точка существует, поскольку $AD > BC$).

Докажем, что треугольники XYZ и CVD равны. Четырёхугольник $ABCV$ является параллелограммом, так как его стороны BC и AV равны и параллельны. Получаем, что $XY = BA = CV$ и $XY \parallel BA \parallel CV$. Также $XZ = CD$, поскольку $XZDC$ — параллелограмм. Углы YXZ и VCD образованы попарно параллельными прямыми ($XY \parallel CV$ и $XZ \parallel CD$), поэтому они равны.

Следовательно, треугольники XYZ и CVD равны по первому признаку, откуда и получаем требуемое равенство:

$$YZ = VD = AD - AV = AD - BC.$$ □

Задача 8.5. *(20 баллов)* Антон и Лёша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. У Антона есть 1011 карточек с номерами $1, 3, 5, \ldots, 2021$, а у Лёши есть 1011 карточек с номерами $2, 4, 6, \ldots, 2022$. Первым ходом Лёша сбрасывает из игры по одной карточке до тех пор, пока сумма чисел на его карточках не станет меньше суммы чисел на карточках Антона. Потом Антон сбрасывает из игры по одной карточке до тех пор, пока сумма чисел на его карточках не станет меньше суммы чисел на карточках Лёши. Затем ходит Лёша, затем Антон, и так далее. Выигрывает тот, кто первым сможет сбросить все свои карточки. Кто из игроков может выиграть независимо от игры соперника, и как ему для этого нужно действовать?

Ответ: Лёша.

Решение. Лёша может действовать так: сбрасывать в любом порядке карточки с номерами $2, 4, \ldots, 2020$, а затем, когда они все кончатся, сбросить карточку с номером 2022.

Предположим, что при такой стратегии Лёши сможет выиграть Антон. Рассмотрим момент, когда Антон должен сбросить свою последнюю карточку. Так как Лёша ещё не победил, то у него точно ещё осталась карточка с номером 2022. У Антона осталась последняя карточка с номером меньше 2022 (номера всех его карточек меньше 2022), а значит, он не может её скинуть, ведь сумма чисел на его карточках уже меньше суммы чисел на карточках Лёши. Противоречие. □

Задача 8.6. *(20 баллов)* Даны различные натуральные числа a, b, c, d, e. Натуральное число n назовём *хорошим,* если все пять чисел $n+a$, $n+b$, $n+c$, $n+d$, $n+e$ являются простыми. Может ли быть так, что среди всех натуральных чисел ровно два являются хорошими?

Ответ: да.

Решение. Докажем, что для пяти чисел 1, 3, 9, 15, 27 ровно два натуральных числа являются хорошими.

Для начала поймём, что числа 2 и 4 — хорошие. Действительно, для $n = 2$ пять сумм будут равны 3, 5, 11, 17, 29, а для $n = 4$ пять сумм будут равны 5, 7, 13, 19, 31, все эти числа являются простыми.

Заметим, что любое хорошее число обязательно чётно (иначе все пять сумм будут чётными, а простое чётное число существует только одно). Предположим, что существует хорошее число $n \geqslant 6$. Числа 1, 3, 9, 15, 27 при делении на 5 дают все пять различных остатков, поэтому и числа $n + 1$, $n + 3$, $n + 9$, $n + 15$, $n + 27$ при делении на 5 тоже дают все пять различных остатков. Значит, среди пяти чисел $n+1$, $n+3$, $n+9$, $n+15$, $n+27$ есть простое число, делящееся на 5, т. е. равное 5. Но $n \geqslant 6$, противоречие. □