Высшая проба

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»
по профилю «Математика» для 10 класса

2022/2023 уч. г.

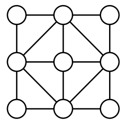
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур, демонстрационный вариант. 10 класс. Решения задач

Балл за верное решение каждой задачи, то есть полное обоснование ответа (или доказательство), указан после номера каждой задачи в скобках. Частичные продвижения в решении задач могут оцениваться промежуточными баллами.

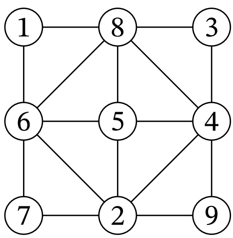
Задача 10.1. *(15 баллов)* На рисунке можно увидеть 6 квадратов с кружочками в вершинах: 4 маленьких, 1 большой и 1 средний (повёрнутый).



Паша заполнил кружочки цифрами от 1 до 9 (каждую цифру он использовал по разу) и для каждого из 6 квадратов нашёл сумму четырёх чисел в его вершинах. Могли ли все эти суммы оказаться одинаковыми?

Ответ: да, могли.

Решение. Паша мог заполнить кружочки, например, так, как показано на рисунке ниже. Легко видеть, что все суммы одинаковы.



$\square$

Задача 10.2. *(15 баллов)* Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке L. На стороне BC нашлись точки P и Q (P лежит между B и Q), что $AB = BQ$ и $AP = PC$. Докажите, что точки A, P, Q, L лежат на одной окружности.

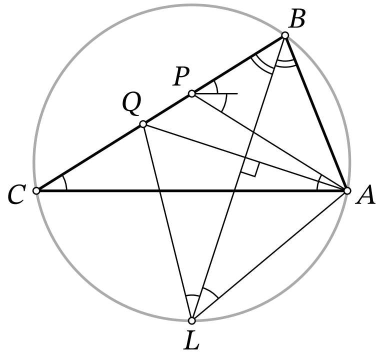


Рис. 1: к решению задачи 10.2

Решение. Поскольку $AB = BQ$, биссектриса угла B является серединным перпендикуляром к отрезку AQ (рис. 1). Точка L лежит на нём, поэтому треугольники ABL и QBL равны, и $\angle QLB = \angle ALB$.

Поскольку четырёхугольник $ABCL$ является вписанным и $AP = PC$, имеем

$$\angle APB = \angle ACP + \angle CAP = 2\angle ACB = 2\angle ALB = \angle ALQ.$$

Отсюда следует, что $\angle APQ + \angle ALQ = 180°$, поэтому точки A, P, Q, L лежат на одной окружности. □

Задача 10.3. *(15 баллов)* Для положительного числа a докажите, что

$$1 + a^{48} \geqslant \frac{(2a)^{47}}{(1+a)^{46}}.$$

Решение. Неравенство из условия эквивалентно неравенству

$$(1 + a^{48}) \cdot (1 + a)^{46} \geqslant 2^{47} \cdot a^{47}.$$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем $1 + a^{48} \geqslant$ $\geqslant 2a^{24}$ и $1 + a \geqslant 2\sqrt{a}$. Следовательно,

$$(1 + a^{48}) \cdot (1 + a)^{46} \geqslant 2a^{24} \cdot (2\sqrt{a})^{46} = 2^{47} \cdot a^{47},$$

что и требовалось. □

Задача 10.4. *(15 баллов)* В компании из 33 людей каждый человек назвал всем остальным свой любимый фильм и свою любимую книгу. Интервьюер задал каждому человеку следующие вопросы:

- «У скольких других людей в компании любимый фильм совпадает с Вашим?»

- «У скольких других людей в компании любимая книга совпадает с Вашей?»

Оказалось, что среди всех ответов встретились все целые числа от 0 до 10 включительно (возможно, были и какие-то другие). Докажите, что у каких-то двух людей совпадают и любимый фильм, и любимая книга.

Решение. Объединим людей в группы по общему любимому фильму и по общей любимой книге (возможны группы из 1 человека). Каждый человек входит ровно в две группы — по фильму и по книге.

Из условия следует, что групп ровно 11. Действительно, есть группы из $1, 2, \ldots, 11$ человек, поэтому групп не меньше 11, но $1 + 2 + \ldots + 11 = 66 = 2 \cdot 33$, т. е. каждый человек уже посчитан дважды, поэтому групп больше нет.

(Заметим — хотя для решения это не требуется — что такое может быть, если, например, группы по любимым фильмам имеют размеры 3, 9, 10, 11, а по любимым книгам — размеры 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8.)

Рассмотрим группу из 11 человек; не нарушая общности, это группа с общим любимым фильмом. Остальных групп, в частности групп с общей любимой книгой, не больше 10. Тогда по принципу Дирихле какие-то двое из этих 11 человек входят в одну группу людей с общей любимой книгой, т. е. у них совпадают и любимый фильм, и любимая книга. □

Задача 10.5. *(20 баллов)* У натурального числа N, делящегося на 16, выбрали два различных нечётных натуральных делителя a и b. Оказалось, что $25a + 33b = N$. Найдите $\frac{a}{b}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Решение. Поскольку числа a и b нечётны и являются делителями числа N, делящегося на 16, то числа $\frac{N}{a}$ и $\frac{N}{b}$ являются целыми числами, делящимися на 16. Пусть $\frac{N}{a} = 16x$ и $\frac{N}{b} = 16y$ для некоторых натуральных x и y. Тогда $a = \frac{N}{16x}$, $b = \frac{N}{16y}$, и условие задачи переписывается в виде

$$25 \cdot \frac{N}{16x} + 33 \cdot \frac{N}{16y} = N \quad \Rightarrow$$
$$\frac{25}{x} + \frac{33}{y} = 16 \quad \Rightarrow$$
$$16xy - 25y - 33x = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(16x - 25)(16y - 33) = 825.$$

В случаях, когда сомножители в левой части отрицательны ($x = 1$ и $y = 1, 2$), они не дают 825 в произведении. Следовательно, это натуральные числа. При этом при делении на 16 число $16x - 25$ даёт остаток 7, а число $16y - 33$ — остаток 15.

Число $825 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11$ можно разложить в произведение двух делителей шестью способами (с точностью до перестановки):

$$1 \cdot 875 = 3 \cdot 275 = 5 \cdot 165 = 11 \cdot 75 = 15 \cdot 55 = 25 \cdot 33$$

с остатками от деления на 16 соответственно

$$1, 9 \quad ; \quad 3, 3 \quad ; \quad 5, 5 \quad ; \; 11, 11 \; ; \quad 15, 7 \quad ; \quad 9, 1 \; .$$

Легко видеть, что среди них нам подходит только случай $16x - 25 = 55$ и $16y - 33 = 15$, откуда $x = 5$ и $y = 3$.

Значит,

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{N}{16x}}{\frac{N}{16y}} = \frac{y}{x} = \frac{3}{5}. \qquad \square$$

Замечание. Для числа $N = 240$ и его нечётных делителей $a = 3$, $b = 5$ условие задачи выполняется: $25 \cdot 3 + 33 \cdot 5 = 240$.

Задача 10.6. *(20 баллов)* Окружность ω_1 касается параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 касается внешним образом окружности ω_1 в точке C, касается прямой ℓ_2 в точке P и пересекает прямую ℓ_1 в точках Q и R. Докажите, что точка C лежит на прямой, содержащей общую хорду описанных окружностей треугольников ABP и BQR.

Первое решение. Пусть Γ_1 и Γ_2 — описанные окружности треугольников ABP и BQR соответственно (рис. 2).

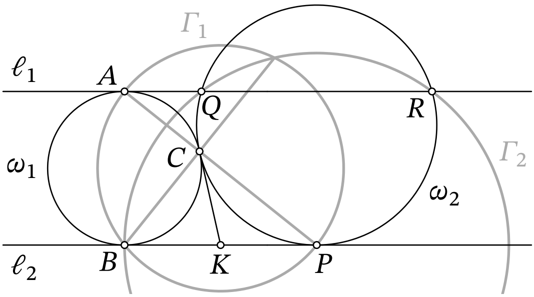
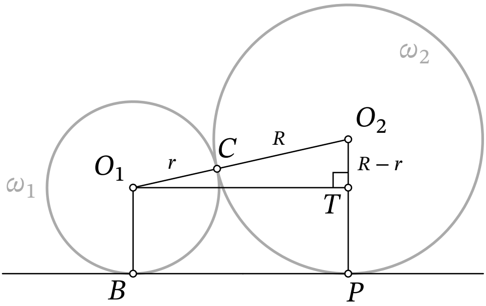


Рис. 2: к первому решению задачи 10.6

Лемма 1. Точка C лежит на отрезке AP.

Доказательство леммы. Отрезок AB — это диаметр ω_1, так как A и B — это точки касания окружности с парой параллельных прямых. Отсюда получаем $\angle ACB = 90°$. Осталось показать, что $\angle BCP = 90°$. Для этого проведём общую касательную к окружностям ω_1 и ω_2 в точке C; пусть она пересекает прямую ℓ_2 в точке K. Из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, имеем $KP = KC = KB$. Тогда в треугольнике BCP медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то есть он прямоугольный. *Лемма доказана.*



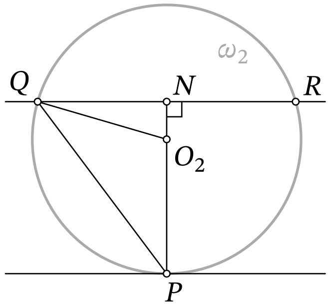


Рис. 3: к первому решению задачи 10.6

Заодно отметим, что так как $AB \perp \ell_2$, то отрезок AP является диаметром окружности Γ_1.

Лемма 2. Точка P — это центр окружности Γ_2.

Доказательство леммы. Достаточно доказать, что $BP = PQ = PR$. Для этого сначала вычислим BP. Обозначим центры окружностей ω_1 и ω_2 за O_1 и O_2 соответственно, а их радиусы — за r и R соответственно (рис. 3a).

Рассмотрим прямоугольную трапецию O_1BPO_2. Пусть T — основание перпендикуляра из O_1 на O_2P. Тогда по теореме Пифагора для треугольника O_1TO_2

$$O_1T^2 + TO_2^2 = O_1O_2^2 \quad \Rightarrow \quad BP^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2 \quad \Rightarrow \quad BP = 2\sqrt{Rr}.$$

Теперь посчитаем PQ и PR. Ясно, что они равны между собой, так как картинка (рис. 3b) симметрична относительно PO_2. Отметим точку N в середине отрезка QR — она также будет основанием перпендикуляра из P на этот отрезок. Тогда

$$PQ^2 = PN^2 + NQ^2 = PN^2 + (O_2Q^2 - O_2N^2) = (2r)^2 + R^2 - (2r-R)^2 = 4rR,$$

откуда $PQ = 2\sqrt{rR}$. *Лемма доказана.*

Теперь нетрудно завершить решение. Точка C лежит на линии центров окружностей Γ_1 и Γ_2. Линия центров пересекает общую хорду данных окружностей под прямым углом; а так как $\angle BCA = 90°$, то точка C и является точкой пересечения. Значит, она лежит на общей хорде Γ_1 и Γ_2. □

Второе решение. Сделаем инверсию относительно точки B. Точка A пусть перейдёт в A'; аналогично будем обозначать образы остальных объектов. Тогда (рис. 4):

- прямая ℓ_2 перейдёт в себя;
- ω_1' будет прямой, параллельной ℓ_2;
- ℓ_1' будет окружностью, касающейся ℓ_2 и ω_1' в точках B и A' соответственно;

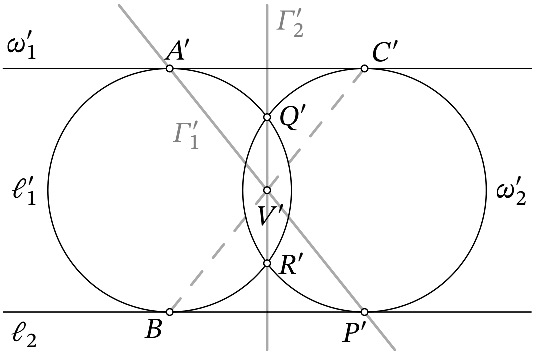


Рис. 4: ко второму решению задачи 10.6

- ω_2' будет окружностью, касающейся ℓ_2 и ω_1' в точках P' и C' соответственно и пересекающей ℓ_1' в точках Q' и R';
- окружности, описанные около треугольников ABP и BQR, перейдут в прямые $A'P'$ и $Q'R'$ соответственно, а их общая хорда — в прямую, соединяющую их пересечение, которое мы обозначим через V', с точкой B.

Искомое утверждение, таким образом, эквивалентно тому, что C' лежит на прямой BV', то есть отрезки BC', $A'P'$ и $Q'R'$ пересекаются в одной точке. Это очевидно из симметрии конструкции относительно прямой $Q'R'$. □