Высшая проба

ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

# ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»
по профилю «Математика» для 11 класса

2022/2023 уч. г.

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Олимпиада «Высшая проба». Математика.

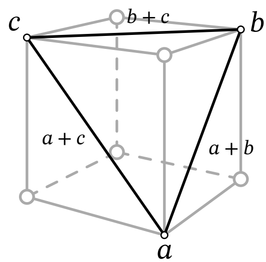
# Заключительный тур, демонстрационный вариант. 11 класс. Решения задач

Балл за верное решение каждой задачи, то есть полное обоснование ответа (или доказательство), указан после номера каждой задачи в скобках. Частичные продвижения в решении задач могут оцениваться промежуточными баллами.

**Задача 11.1.** *(15 баллов)* Коля расставил в вершинах куба действительные числа и сообщил Грише сумму чисел на каждой диагонали каждой грани. Всегда ли Гриша сможет однозначно восстановить число в каждой вершине?

*Ответ:* да, всегда.

*Решение.* Заметим, что если известны все попарные суммы какой-то тройки чисел $a$, $b$, $c$, то мы можем восстановить и сами числа. Действительно, $a = \frac{1}{2}\big((a+b)+(a+c)-(b+c)\big)$, аналогично можно выразить $b$ и $c$.




Для каждой вершины куба три вершины, соседние с ней по ребру, попарно соединены тремя диагоналями граней. Значит, известны все их попарные суммы, и поэтому мы сможем восстановить числа во всех соседях каждой вершины. Таким образом мы сможем восстановить числа во всех вершинах куба. □

**Задача 11.2.** *(15 баллов)* Каждая клетка таблицы $10 \times 10$ покрашена либо в чёрный, либо в белый цвет. За одну операцию разрешается выбрать любой квадрат $2 \times 2$ и поменять цвета всех четырёх клеток в нём на противоположные.

Назовём раскраску таблицы *красивой,* если за несколько таких операций все её клетки можно сделать белыми. Докажите, что раскраска таблицы является красивой тогда и только тогда, когда в каждом её столбце и в каждой её строке чётное количество чёрных клеток.

*Решение.* Для начала заметим, что каждая возможная операция сохраняет чётность количества чёрных клеток в каждой строке и в каждом столбце. Действительно, так как в каждой строке (или столбце) либо 2, либо 0 клеток меняют цвет на противоположный, то количество чёрных клеток может либо увеличиться на 2, либо уменьшиться на 2, либо не измениться. Таким образом, если изначально не во всех строках или столбцах чётное количество чёрных клеток, то белую таблицу получить не получится.

Теперь докажем, что если изначально в каждой строке и в каждом столбце чётное количество чёрных клеток, то все клетки таблицы можно сделать белыми. Для этого будем делать клетки белыми поочерёдно — слева направо сверху вниз. Вначале сделаем угловую левую верхнюю клетку белой, перекрасив при необходимости квадрат, в котором она является левой верхней клеткой. Далее аналогично сделаем белой клетку под ней и так далее. Каждый раз мы не перекрашиваем более верхние клетки, поэтому они остаются белыми. После того, как мы сделаем белой предпоследнюю клетку первого столбца, последняя клетка точно станет белой (ведь в этом столбце количество чёрных клеток всегда было чётным, а так как оно не больше 1, то оно равно 0).

После того как мы сделали белым первый столбец, переходим ко второму столбцу, с которым поступаем ровно так же, далее к третьему и т. д. Так как каждый раз текущая клетка, которую мы делаем белой, не левее всех предыдущих, а также ниже всех предыдущих из текущего столбца, то квадратик, в котором она является левой верхней клеткой, не пересекается с ранее рассмотренными клетками, поэтому они остаются белыми.

Теперь поймём, что когда мы сделали белым предпоследний столбец, последний столбец точно будет белым (ведь в каждой строке количество чёрных клеток всегда было чётным, а так как оно не больше 1, то оно равно 0). Таким образом, мы перекрасили всю таблицу в белый цвет. $\square$

**Задача 11.3.** *(15 баллов)* В равнобедренном треугольнике $ABC$ равны стороны $AB$ и $BC$. Окружность $\omega$ касается прямой $BC$ в точке $C$ и пересекает прямую $AB$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что $\angle ACP = \angle ACQ$.

*Решение.* По свойству отрезков касательной и секущей имеем $BC^2 = BP \cdot BQ$. Это означает, что один из отрезков $BP$ или $BQ$ короче, чем $BC = AB$, а другой — длиннее. Без ограничения общности будем считать, что точка $P$ лежит на отрезке $AB$, как на рис. 1.

Продлим $CA$ до пересечения с окружностью $\omega$ в точке $R$. В силу того, что $BC$ — касательная к $\omega$, дуга $RPC$ равна удвоенному углу $BCA$. С другой стороны, сумма дуг $RQ$ и $PC$ равна

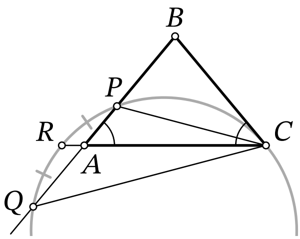



Рис. 1: к решению задачи 11.3

удвоенному углу $BAC$, то есть той же величине. Отсюда извлекаем равенство дуг $QR$ и $RP$. Следовательно, равны и опирающиеся на них углы, $\angle ACP = \angle ACQ$. $\square$

*Другое решение.* Перепишем равенство $BC^2 = BP \cdot BQ$ в виде $BC : BP = BQ : BC$. Отсюда ясно, что треугольники $BQC$ и $BCP$ подобны; обозначим их коэффициент подобия за $\alpha = BC : BP = BQ : BC = CQ : CP$. Тогда

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{BQ - AB}{AB - PB} = \frac{BC \cdot (\alpha - 1)}{BC \cdot (1 - \alpha^{-1})} = \alpha.$$

Значит, $AQ : AP = CQ : CP$, и $CA$ — биссектриса по соответствующему критерию. $\square$

**Задача 11.4.** *(15 баллов)* У многочлена $P(x)$ степени 2022 нет действительных корней. Его старший коэффициент равен 1, а все остальные коэффициенты равны либо 1, либо $-1$. Какое наибольшее количество отрицательных коэффициентов у него может быть?

*Ответ:* 1011.

*Решение.* Так как старший коэффициент этого многочлена положительный, то при достаточно больших $x$ верно $P(x) > 0$. В силу непрерывности графика многочлена это означает, что если при каком-то $x$ верно $P(x) < 0$, то где-то на промежутке между отрицательным и положительным значениями будет корень. У $P(x)$ всего 2023 коэффициента, поэтому если хотя бы 1012 из них будут отрицательными, то $P(1)$ будет меньше 0 (ведь $P(1)$ равно сумме всех коэффициентов), а значит, у $P(x)$ будут корни.

Теперь покажем, что у $P(x)$ может быть ровно 1011 отрицательных коэффициентов. Пусть все коэффициенты перед нечётными степенями равны $-1$, а перед чётными — равны 1. Тогда

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2022} - x^{2021} + x^{2020} - \ldots - x^3 + x^2 - x + 1 = \\ &= \frac{1}{2}x^{2022} + \frac{1}{2}(x^{1011} - x^{1010})^2 + \frac{1}{2}(x^{1010} - x^{1009})^2 + \ldots + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку каждый квадрат неотрицателен, а $\frac{1}{2} > 0$, получаем, что при любых $x$ вся сумма положительна, т. е. $P(x)$ не имеет действительных корней. $\square$

**Задача 11.5.** *(20 баллов)* При каких натуральных $n$ число $n \cdot 2^{n+1} + 1$ является точным квадратом?

*Ответ:* 3.

*Решение.* Перепишем условие в виде уравнения $n \cdot 2^{n+1} + 1 = t^2$, у которого нужно найти решения с натуральным $n$ и целым $t$. Это уравнение можно переписать в виде

$$n \cdot 2^{n+1} = (t-1)(t+1).$$

Заметим, что левая часть делится на 2, а значит, и правая должна делиться на 2. А так как числа $t-1$ и $t+1$ отличаются на 2, то они оба должны быть чётными, при этом одно из них не делится на 4. Следовательно, одно из этих чисел должно делиться на $2^n$.

Теперь заметим, что если $2^n > 2n+2$, то равенство не может выполняться. Действительно, если $t-1$ делится на $2^n$, то $t+1 \geqslant 2^n + 2 > 2n+4$, откуда $(t-1)(t+1) > 2n \cdot 2^n$. Если же $t+1$ делится на $2^n$, то $t-1 \geqslant 2^n - 2 > 2n$, откуда по-прежнему $(t-1)(t+1) > 2n \cdot 2^n$.

Поймём, при каких натуральных $n$ верно $2^n \leqslant 2n+2$. Заметим, что при $n = 1, 2, 3$ это неравенство выполнено, а при $n = 4$ — уже нет. Если же $n > 4$, то при увеличении $n$ на 1 левая часть увеличивается в 2 раза, т. е. хотя бы на 16, а правая часть увеличивается всего лишь на 2. Поэтому при $n > 4$ левая часть будет больше.

Осталось перебрать значения $n = 1, 2, 3$. При $n = 1$ получаем $1 \cdot 2^2 + 1 = 5$, что не является квадратом. При $n = 2$ получаем $2 \cdot 2^3 + 1 = 17$, что также не является квадратом. При $n = 3$ получаем $3 \cdot 2^4 + 1 = 49 = 7^2$. Следовательно, единственное возможное значение $n$ — это 3. □

**Задача 11.6.** *(20 баллов)* В стране 100 городов и 200 дорог; каждая дорога соединяет два города, причём каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Докажите, что найдутся два различных циклических маршрута одинаковой длины.

(Длина циклического маршрута — это количество дорог в нём. В каждом циклическом маршруте каждый город должен участвовать не более одного раза. Циклические маршруты различны, если существует хотя бы одна дорога, содержащаяся в одном из них и не содержащаяся в другом.)

*Решение.* Переведём задачу на язык графов: города — это вершины графа, рёбрами соединяются города, между которыми проходит дорога, а циклические маршруты — это простые циклы. Нам нужно доказать, что в графе со 100 вершинами и 200 рёбрами существуют два различных простых цикла с одинаковыми длинами.

Сначала докажем, что существуют рёбра $e_1, e_2, \ldots, e_{101}$ такие, что для каждого из них существует простой цикл, проходящий через это ребро, но не проходящий через любое ребро с бóльшим номером. Будем пользоваться тем фактом, что если в графе количество рёбер не меньше количества вершин, то в нём существует простой цикл.

Найдём простой цикл в исходном графе и выберем в нём произвольное ребро, обозначим его $e_{101}$ и удалим из графа. В оставшемся графе найдём простой цикл, в этом цикле выберем произвольное ребро, обозначим его $e_{100}$, удалим его и продолжим этот процесс дальше. Когда в графе останется 100 рёбер, мы всё ещё сможем найти в нём цикл, а значит, выбрать ребро $e_1$. Заметим, что для каждого из выбранных рёбер действительно существует требуемый простой цикл — тот, в котором было выбрано это ребро. При этом соответствующие циклы не проходят через рёбра с бо́льшими номерами, так как в момент рассмотрения этого цикла рёбра с бо́льшими номерами уже удалены. По этой же причине рёбра $e_1, e_2, \ldots, e_{101}$ не могут совпадать.

Таким образом, в графе есть хотя бы 101 различный цикл. Поскольку длины этих циклов принимают значения от 3 до 100, среди них обязательно найдутся два с одинаковыми длинами. $\square$