Высшая проба

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»
по профилю «Математика» для 9 класса

2022/2023 уч. г.

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур, демонстрационный вариант. 9 класс. Решения задач

Балл за верное решение каждой задачи, то есть полное обоснование ответа (или доказательство), указан после номера каждой задачи в скобках. Частичные продвижения в решении задач могут оцениваться промежуточными баллами.

Задача 9.1. *(15 баллов)* Петя выписал на доску все натуральные делители числа N в порядке возрастания: начал он числом 1, а закончил числом N. Оказалось, что второй по счёту делитель в 3 раза меньше предпоследнего. Чему может быть равно число N?

Ответ: 12, 27.

Решение. Пусть второй по счёту делитель числа N равен x. Тогда предпоследний делитель равен $\frac{N}{x}$. Получаем, что $3x = \frac{N}{x}$ и $3x^2 = N$.

Значит, у числа N есть простой делитель 3, поэтому $x \leqslant 3$.

Если $x = 2$, то $N = 12$, а список делителей N выглядит следующим образом:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 12.$$

Если $x = 3$, то $N = 27$, а список делителей N выглядит следующим образом:

$$1, \quad 3, \quad 9, \quad 27. \qquad \square$$

Задача 9.2. *(15 баллов)* Аня, Маша и Таня ели конфеты из подарочного набора. В какой-то момент оказалось, что:

- если все оставшиеся конфеты съест Таня, то она суммарно съест половину всех конфет набора;
- если все оставшиеся конфеты напополам съедят Аня и Маша, то Маша суммарно съест половину всех конфет набора.

Во сколько раз увеличится количество конфет, съеденных Аней, если все оставшиеся конфеты съест она?

Ответ: 3.

Решение. Пусть N — общее количество конфет в наборе, а M — количество конфет, которые девочки ещё не съели.

Тогда из первого условия следует, что Таня съела $\frac{1}{2}N - M$ конфет, а из второго следует, что Маша съела $\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}M$ конфет.

Получается, что Аня съела

$$N - M - \left(\frac{1}{2}N - M\right) - \left(\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}M\right) = \frac{1}{2}M.$$

Если к этому добавить M, получится $\frac{3}{2}M$, то есть Аня съест в 3 раза больше конфет. □

Задача 9.3. *(15 баллов)* На клетчатой доске размером 10×10 закрашены 10 клеток. При каком наибольшем целом P на этой доске гарантированно найдётся клетчатый прямоугольник без закрашенных клеток с периметром не меньше P? (Стороны прямоугольника должны идти по линиям сетки.)

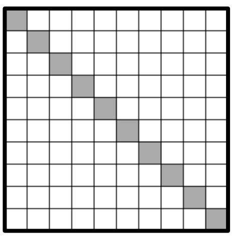
Ответ: 20.

Решение. Докажем, что всегда найдётся прямоугольник без закрашенных клеток, периметр которого хотя бы 20.

Если найдётся строка или столбец, где нет закрашенной клетки, то можно рассмотреть соответствующий прямоугольник 1×10 периметром 22.

Если же в каждом столбце и в каждой строке есть хотя бы одна закрашенная клетка, то найдётся столбец, в котором закрашена только самая верхняя клетка. В нём есть прямоугольник 1×9 периметром 20.

Теперь приведём пример, когда периметр любого прямоугольника без закрашенных клеток не больше 20. Для этого раскрасим все клетки на главной диагонали. Легко видеть, что для любого прямоугольника $a \times b$ без закрашенных клеток сумма $a + b$ не больше 10, поэтому и периметр не больше 20.



□

Задача 9.4. *(15 баллов)* На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC отмечены точки X, Y, Z соответственно. Известно, что $YX = YB$ и $YZ = YC$. Докажите, что биссектриса угла XYZ проходит через центр описанной окружности треугольника AXZ.

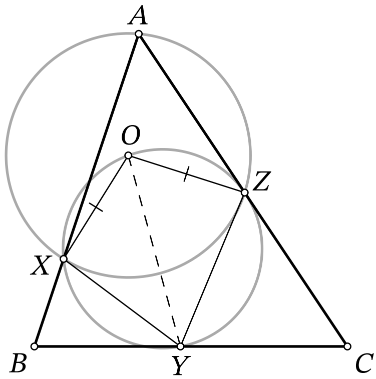


Рис. 1: к решению задачи 9.4

Решение. Отметим центр O описанной окружности треугольника AXZ (рис. 1). Докажем, что точки O, X, Z, Y лежат на одной окружности.

Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Вычислим сумму углов XOZ и XYZ.

Заметим, что $\angle XOZ = 2\angle A = 2\alpha$, так как это центральный угол. Также

$$\angle XYZ = 180^\circ - \angle BYX - \angle CYZ = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - 2\gamma) = 2\beta + 2\gamma - 180^\circ.$$

Теперь уже нетрудно вычислить сумму этих углов:

$$\angle XOZ + \angle XYZ = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 180^\circ = 180^\circ,$$

так как $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Отсюда следует вписанность четырёхугольника $XYZO$.

Осталось лишь заметить, что биссектриса угла XYZ делит дугу XOZ пополам. А точка O как раз и является серединой дуги XOZ, ведь $XO = OZ$. $\square$

Задача 9.5. *(20 баллов)* Дано n-значное простое число $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (a_1 — его первая цифра, a_2 — вторая цифра, …, a_n — последняя цифра), где $n > 10$. Может ли многочлен

$$P(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

иметь $n - 1$ целый корень с учётом кратности?

Ответ: не может.

Решение. Обозначим $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ — целые корни многочлена $P(x)$. Тогда многочлен можно представить в следующем виде:

$$P(x) = a_1(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Кроме этого, нетрудно заметить, что

$$P(10) = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n = A =$$
$$= a_1(10 - x_1)(10 - x_2) \cdot \dots \cdot (10 - x_{n-1}).$$

Так как A — простое число, то для некоторого $i = 1, \dots, n-1$ верно равенство

$$A = |10 - x_i|.$$

Осталось заметить, что по теореме Виета $a_n \ \vdots \ x_i$, то есть $|x_i| \leqslant a_n \leqslant 9$ ($a_n \neq 0$, поскольку это последняя цифра простого числа). Но тогда $A = |10 - x_i| \leqslant 19$. Противоречие. □

Задача 9.6. *(20 баллов)* У царя Салтана при дворе есть 1000 мудрецов. Он знает, что некоторые из них всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут (известно, что есть мудрецы обоих типов). Царь Салтан хочет узнать, сколько всего лжецов среди его мудрецов.

Раз в день он собирает у себя группу мудрецов и спрашивает каждого, сколько в этой группе лжецов. За какое наименьшее количество дней царь Салтан сможет гарантированно определить общее количество лжецов?

Ответ: 2.

Решение. В первый день опросим всех мудрецов. Разобьём мудрецов на группы по ответам. Если в группе x людей, а каждый из них назвал число $1000 - x$, то назовём эту группу *особенной.* Ясно, что все мудрецы, говорящие правду, образуют особенную группу.

Если получилась только одна особенная группа, то все мудрецы в этой группе говорят правду, а все остальные — лжецы.

Если особенных групп получилось $k > 1$, то на следующий день возьмём по одному мудрецу из каждой такой группы и опросим их. Среди всех групп только одна полностью состоит из мудрецов, говорящих правду, поэтому во второй день ровно один человек назовёт число $k - 1$, а значит, его ответ в первый день — количество лжецов.

Теперь покажем, что не существует алгоритма, позволяющего гарантированно узнать количество лжецов за один день. Если мы пригласим всех мудрецов, то может получиться несколько особенных групп (например, 400 человек ответят «600», а остальные — «400»), и любая из них может быть группой правдивых, поэтому мы не сможем гарантированно определить точное количество лжецов. Если же мы кого-то не пригласим, то точное количество лжецов мы тоже не узнаем, ведь про неприглашённых ничего не известно. □