



**Высшая
проба**
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»
по профилю «Математика» для 8 класса

2022/2023 уч. г.



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Балл за верное решение каждой задачи, то есть полное обоснование ответа (или доказательство), указан после номера каждой задачи в скобках. Частичные продвижения в решении задач могут оцениваться промежуточными баллами.

Задача 8.1. (15 баллов) На доске написано натуральное число, все цифры которого различны. Любые две его соседние цифры образуют двузначное число, которое делится на 19 или на 31. Какое наибольшее число может быть записано на доске?

Задача 8.2. (15 баллов) Различные действительные числа a, b, c таковы, что

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{и} \quad b^2 = (a + c)^2.$$

Чему может быть равно $a + b + c$?

Задача 8.3. (15 баллов) В компании людей каждые двое либо дружат, либо враждуют, либо безразличны друг другу. У каждого из них есть хотя бы один друг и хотя бы один враг. Все они живут по принципу «Друг моего врага — мой враг» (то есть если люди A и B враждуют, а B и C дружат, то A и C обязательно враждуют). Докажите, что хотя бы у одного человека в компании врагов больше, чем друзей.

Задача 8.4. (15 баллов) Трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) такова, что $BC < AD$. Внутри трапеции отмечена точка X , а снаружи трапеции отмечены точки Y и Z так, что четырёхугольники $ABXY$ и $CDZX$ являются параллелограммами. Докажите, что $YZ = AD - BC$.

Задача 8.5. (20 баллов) Антон и Лёша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. У Антона есть 1011 карточек с номерами $1, 3, 5, \dots, 2021$, а у Лёши есть 1011 карточек с номерами $2, 4, 6, \dots, 2022$. Первым ходом Лёша сбрасывает из игры по одной карточке до тех пор, пока сумма чисел на его карточках не станет меньше суммы чисел на карточках Антона. Потом Антон сбрасывает из игры по одной карточке до тех пор, пока сумма чисел на его карточках не станет меньше суммы чисел на карточках Лёши. Затем ходит Лёша, затем Антон, и так далее. Выигрывает тот, кто первым сможет сбросить все свои карточки. Кто из игроков может выиграть независимо от игры соперника, и как ему для этого нужно действовать?

Задача 8.6. (20 баллов) Даны различные натуральные числа a, b, c, d, e . Натуральное число n назовём *хорошим*, если все пять чисел $n + a, n + b, n + c, n + d, n + e$ являются простыми. Может ли быть так, что среди всех натуральных чисел ровно два являются хорошими?