



**Высшая
проба**
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»
по профилю «Математика» для 10 класса

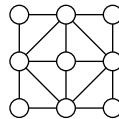
2022/2023 уч. г.



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Балл за верное решение каждой задачи, то есть полное обоснование ответа (или доказательство), указан после номера каждой задачи в скобках. Частичные продвижения в решении задач могут оцениваться промежуточными баллами.

Задача 10.1. (15 баллов) На рисунке можно увидеть 6 квадратов с кружочками в вершинах: 4 маленьких, 1 большой и 1 средний (повёрнутый).



Паша заполнил кружочки цифрами от 1 до 9 (каждую цифру он использовал по разу) и для каждого из 6 квадратов нашёл сумму четырёх чисел в его вершинах. Могли ли все эти суммы оказаться одинаковыми?

Задача 10.2. (15 баллов) Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке L . На стороне BC нашлись точки P и Q (P лежит между B и Q), что $AB = BQ$ и $AP = PC$. Докажите, что точки A, P, Q, L лежат на одной окружности.

Задача 10.3. (15 баллов) Для положительного числа a докажите, что

$$1 + a^{48} \geq \frac{(2a)^{47}}{(1+a)^{46}}.$$

Задача 10.4. (15 баллов) В компании из 33 людей каждый человек назвал всем остальным свой любимый фильм и свою любимую книгу. Интервьюер задал каждому человеку следующие вопросы:

- «У скольких других людей в компании любимый фильм совпадает с Вашим?»
- «У скольких других людей в компании любимая книга совпадает с Вашей?»

Оказалось, что среди всех ответов встретились все целые числа от 0 до 10 включительно (возможно, были и какие-то другие). Докажите, что у каких-то двух людей совпадают и любимый фильм, и любимая книга.

Задача 10.5. (20 баллов) У натурального числа N , делящегося на 16, выбрали два различных нечётных натуральных делителя a и b . Оказалось, что $25a + 33b = N$. Найдите $\frac{a}{b}$.

Задача 10.6. (20 баллов) Окружность ω_1 касается параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 касается внешним образом окружности ω_1 в точке C , касается прямой ℓ_2 в точке P и пересекает прямую ℓ_1 в точках Q и R . Докажите, что точка C лежит на прямой, содержащей общую хорду описанных окружностей треугольников ABP и BQR .