Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Демонстрационный вариант.

8 класс. Решения задач

Задача 8.1. Найдите наибольшее шестизначное число $\overline{ABCDEF}$, состоящее из различных цифр, такое, что $\overline{DEF} = 3 \cdot \overline{ABC}$.

(Здесь $\overline{XYZ}$ — это число, записываемое цифрами X, Y, Z в указанном порядке.)

Ответ: 327981.

Решение. Поскольку число $3 \cdot \overline{ABC}$ — трёхзначное, то оно меньше 1000, и тогда $\overline{ABC} \leqslant 333$.

Значения

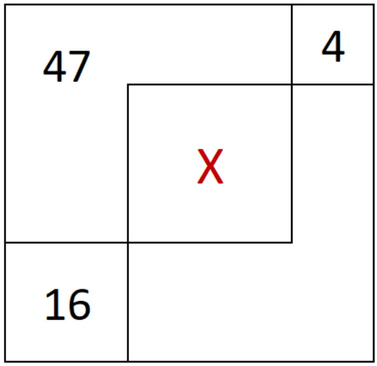
$$\overline{ABC} = 333, 332, 331, 330, 329, 328$$

под условие не подходят, так как в числе $\overline{ABCDEF}$ не все цифры получаются разными:

$$\overline{ABCDEF} = \underline{33}3999, \underline{33}2996, \underline{33}1993, \underline{33}0990, 32\underline{99}87, 32\underline{8}9\underline{8}4.$$

Наибольшее число, удовлетворяющее всем условиям, начинается с 327 и равно 327981. □

Задача 8.2. Внутри большого квадрата расположили три маленьких квадрата, как показано на рисунке. Площади двух маленьких квадратов и одной из оставшихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь третьего маленького квадрата, обозначенного X.



Ответ: 42,25.

Решение. Ясно, что длины сторон маленьких квадратов, примыкающих к углам, равны $\sqrt{16} = 4$ и $\sqrt{4} = 2$. Обозначим длину стороны квадрата X через x.

Посчитаем площадь прямоугольника, состоящего из двух частей, помеченных 47 и X. С одной стороны, эта площадь равна $47 + x^2$; с другой — произведению длин сторон: $(4 + x) \cdot (2 + x)$. Составляем и решаем соответствующее уравнение:

$$47 + x^2 = (4 + x)(2 + x) \iff 47 + x^2 = 8 + 6x + x^2 \iff 39 = 6x \iff x = 6{,}5.$$

Получается, что неизвестная площадь X равна $x^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$. □

Задача 8.3. Междугородний автобус совершает рейсовый маршрут из города A в город B. По пути от A до B есть несколько остановок, на каждой из них выходило 2 человека и садилось 3. С каждого пассажира водитель взимает плату 8 тугриков за проезд (независимо от того, когда он вошёл и когда вышел).

Известно, что в город B приехали 22 человека, а выручка водителя составила 320 тугриков. Сколько пассажиров выехало из A?

Ответ: 13.

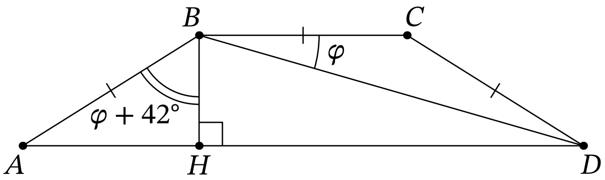
Решение. Выручка водителя составила 320 тугриков при цене билета 8 тугриков; значит, всего $320/8 = 40$ человек побывали на рейсе и оплатили проезд.

Из этих 40 людей 22 доехали до города B, тогда на промежуточных остановках вышли $40 - 22 = 18$ человек. На каждой остановке выходило 2, всего остановок было $18/2 = 9$.

После каждой остановки число людей в автобусе увеличивалось на $3 - 2 = 1$, так как 3 садились и 2 выходили. После посещения всех 9 остановок изначальное число людей в автобусе увеличилось на 9 и стало равно 22. Значит, изначально в автобусе было $22 - 9 = 13$ человек. □

Задача 8.4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $AB = BC = CD < AD$. Точка H — основание перпендикуляра из точки B на сторону AD. Известно, что $\angle ABH = \angle CBD + 42°$. Сколько градусов составляет угол DBH?

Ответ: 74.



Решение. Пусть $\angle CBD = \varphi$, тогда $\angle ABH = \varphi + 42°$.

Треугольник BCD равнобедренный, поэтому $\angle CBD = \angle BDC = \varphi$, $\angle BCD = 180° - 2\varphi$. По свойству трапеции $\angle CDA = 180° - \angle BCD = 2\varphi$.

С другой стороны, в прямоугольном треугольнике ABH легко найти угол BAH:

$$\angle BAH = 90° - \angle ABH = 90° - (\varphi + 42°) = 48° - \varphi.$$

В равнобокой трапеции углы при основании равны:

$$2\varphi = \angle CDA = \angle BAD = \angle BAH = 48° - \varphi.$$

Получаем, что $2\varphi = 48° - \varphi$, откуда $\varphi = 16°$.

И наконец находим искомый угол: $\angle DBH = \angle CBH - \angle CBD = 90° - \varphi = 74°$. □

Задача 8.5. Сколькими способами среди чисел $1, 2, 3, \ldots, 12$ можно выбрать три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Способы, отличающиеся порядком чисел, считаются одинаковыми. Например, $(1, 2, 3)$ и $(3, 1, 2)$ — одна и та же тройка чисел.

Ответ: 76.

Решение. Выясним, какие остатки при делении на 3 могут давать три числа с суммой, кратной 3. Несложным перебором приходим к выводу, что все возможные тройки остатков: $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(0, 1, 2)$. Для каждой тройки остатков посчитаем отдельно, сколько троек чисел ей соответствуют.

Среди чисел $1, 2, 3, \ldots, 12$ ровно 4 числа дают остаток 0 при делении на 3: это $3, 6, 9, 12$. Существует ровно 4 способа выбрать три из них: $(6, 9, 12)$, $(3, 9, 12)$, $(3, 6, 12)$, $(3, 6, 9)$. Значит, есть всего 4 способа выделить три числа с остатками $(0, 0, 0)$ при делении на 3.

Аналогично есть 4 способа выделить три числа с остатками $(1, 1, 1)$ и есть 4 способа выделить три числа с остатками $(2, 2, 2)$ при делении на 3.

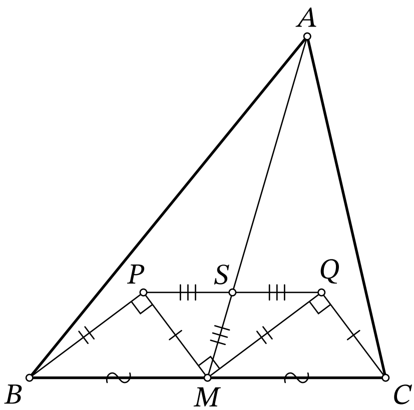


Рис. 1: к решению задачи 8.7

Посчитаем, сколько существует троек чисел с остатками $(0, 1, 2)$. Есть 4 способа выбрать число с остатком 0, 4 способа — с остатком 1, 4 способа — с остатком 2. Всего способов выбрать тройку чисел с остатками $(0, 1, 2)$ ровно $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Итак, общее количество способов равно $4 + 4 + 4 + 64 = 76$. □

Задача 8.6. Даны 5 действительных чисел $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, сумма которых равна 50. Какое наибольшее значение может принимать величина $a + b + c$?

Ответ: 30.

Решение. Докажем, что $a + b + c \leqslant 30$. Рассмотрим

$$5 \cdot (a + b + c) = 3 \cdot (a + b + c) + a + a + b + b + c + c \leqslant$$
$$\leqslant 3 \cdot (a + b + c) + d + d + d + e + e + e = 3 \cdot (a + b + c + d + e) = 150.$$

Поскольку $5 \cdot (a + b + c) \leqslant 150$, то $a + b + c \leqslant 30$.

Если $a = b = c = d = e = 10$, то условие задачи выполнено и $a + b + c = 30$, то есть значение 30 достигается. □

Задача 8.7. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Пусть P — основание перпендикуляра из точки B на биссектрису угла BMA, Q — основание перпендикуляра из точки C на биссектрису угла CMA. Отрезки AM и PQ пересекаются в точке S. Найдите длину отрезка SM, если $BP = 4$ и $CQ = 3$.

Ответ: 2,5.

Решение. По условию $\angle BMP = \angle SMP$ и $\angle CMQ = \angle SMQ$. Тогда

$$\angle PMQ = \angle SMP + \angle SMQ = \angle BMP + \angle CMQ = \frac{\angle BMA + \angle CMA}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Отсюда следует, что $\angle PBM = \angle QMC$ и $\angle PMB = \angle QCM$. Следовательно, прямоугольные треугольники CQM и MPB равны по гипотенузе и острым углам (рис. 1). Из равенства этих треугольников получаем, что $PM = QC = 3$ и $QM = PB = 4$.

Также заметим, что прямоугольный треугольник PMQ равен треугольникам MPB и CQM по прямому углу и двум катетам. Тогда $\angle SPM = \angle BMP = \angle SMP$, поэтому $SP = SM$. Аналогично получаем, что $SM = SQ$, то есть искомый отрезок SM равен половине отрезка PQ. Воспользовавшись теоремой Пифагора, находим ответ:

$$SM = \frac{PQ}{2} = \frac{\sqrt{MP^2 + MQ^2}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = 2{,}5. \qquad \square$$

Задача 8.8. На конференцию приехали 7 математиков, 9 физиков и 1 программист. Известно, что у каждого математика по двенадцать знакомых среди участников конференции, а у каждого физика — по четыре. Сколько знакомых может быть у программиста? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 6, 8.

Решение. Заметим сразу, что число знакомых программиста должно быть чётным, ведь если сложить количества знакомых у всех участников конференции, должно получиться удвоенное общее число знакомств — чётное число.

Обозначим число знакомств между математиками и физиками через x, между математиками и программистом — через y, между физиками и программистом — через z. Ясно, что $0 \leqslant y \leqslant 7$ и $0 \leqslant z \leqslant 9$.

Каждый математик знаком с двенадцатью людьми. Из этих двенадцати не более шести — другие математики, а значит каждый математик знает хотя бы шесть не-математиков. Таким образом, суммарное число знакомств математиков с не-математиками оценивается так: $x + y \geqslant 7 \cdot 6 = 42$.

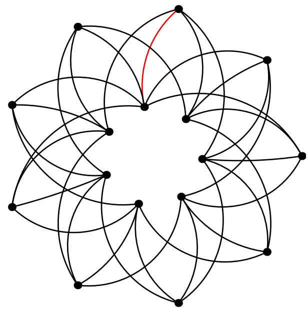
Каждый физик знаком с четырьмя людьми, и суммарное число знакомств физиков с не-физиками оценивается так: $x + z \leqslant 9 \cdot 4 = 36$.

Имеем $42 \leqslant x + y \leqslant (x + z) + y \leqslant 36 + y$, откуда $y \geqslant 6$.

Кроме того, $36 \geqslant x + z \geqslant (42 - y) + z \geqslant (42 - 7) + z = 35 + z$, откуда $z \leqslant 1$.

Значит, $6 \leqslant y \leqslant 7$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, откуда получаем, что число знакомых $y + z$ программиста не меньше 6 и не больше 8. Поскольку это число чётно, получаем два возможных значения: 6 и 8.

Можно привести примеры ситуаций, когда у программиста действительно бывает и 6, и 8 знакомых. На рисунке показано, как можно познакомить 7 математиков (внутренние вершины) с 9 физиками (внешние вершины) так, чтобы у каждого математика, кроме одного, было 5 знакомств, а у оставшегося (с красным ребром) — 6 знакомств. У физиков при этом окажется по 4 знакомства.



После этого всех математиков можно познакомить друг с другом, а всех математиков кроме математика с красным ребром познакомить с программистом. Так получится пример с 6 знакомствами у программиста.

Чтобы построить пример с 8 знакомствами, можно разорвать знакомство по красному ребру и вместо этого познакомить соответствующих физика и математика с программистом. □