Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Демонстрационный вариант.

9 класс. Решения задач

Задача 9.1. Карлсону на день рождения подарили большую банку малинового варенья. В течение 99 дней он ел варенье по следующему правилу: для всех $k = 1, 2, \ldots, 99$ в k-й день Карлсон ел $\frac{1}{k+1}$ от текущего остатка (в первый день он съел половину всего варенья, во второй — $\frac{1}{3}$ от остатка, и т.д.). Какая часть от изначального объёма варенья осталась у Карлсона через 99 дней?

Ответ: $\frac{1}{100}$.

Решение. Съесть $\frac{1}{n}$ часть оставшейся части варенья — это то же самое, что умножить размер этой части варенья на $\frac{n-1}{n}$. Значит, через 99 дней останется $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$ часть изначального объёма. □

Задача 9.2. Найдите наибольшее десятизначное число, состоящее из различных цифр, у которого разность между любыми двумя соседними цифрами не меньше 3.

Ответ: 9638527140.

Решение. Это число можно получить, выписывая на каждом шаге, кроме трёх последних, наибольшую доступную цифру. Если на каком-то из этих шагов выписать цифру меньше, то и итоговое число окажется меньше. Если после цифры 7 выписать 4, то дальше не получится написать обе оставшиеся цифры 0 и 1 (поэтому число будет не более чем девятизначным, т.е. меньше указанного в ответе числа). Значит, следующая цифра после 7 должна быть 1, а после неё максимально доступные цифры — это 4 и 0. Значит, число 9638527140 максимально. □

Задача 9.3. Назовём дробь $\frac{a}{b}$ *красивой*, если a и b — натуральные числа, сумма которых равна 15 (дробь может быть сократимой). Сколько существует натуральных чисел, представимых в виде суммы двух (не обязательно различных) красивых дробей?

Ответ: 11.

Решение. Выпишем все красивые дроби

$$\frac{1}{14}, \frac{2}{13}, \frac{3}{12}, \frac{4}{11}, \frac{5}{10}, \frac{6}{9}, \frac{7}{8}, \frac{8}{7}, \frac{9}{6}, \frac{10}{5}, \frac{11}{4}, \frac{12}{3}, \frac{13}{2}, \frac{14}{1}$$

и приведём их к несократимому виду

$$\frac{1}{14}, \frac{2}{13}, \frac{1}{4}, \frac{4}{11}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{8}{7}, \frac{3}{2}, 2, \frac{11}{4}, 4, \frac{13}{2}, 14.$$

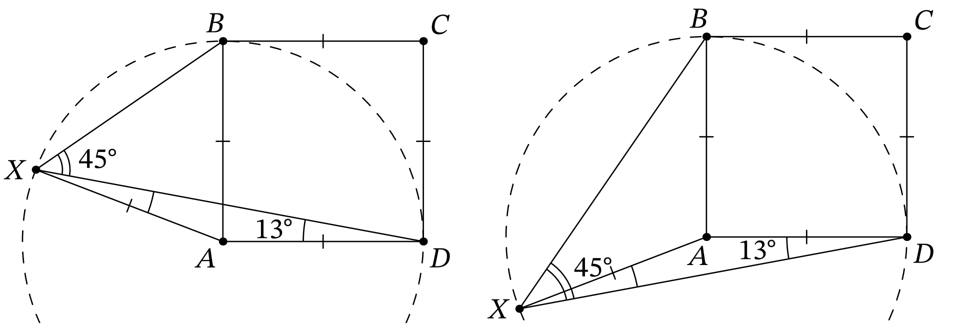
Сразу поймём, что число, которое в сумме с собой даёт целое, — либо целое, либо дробь со знаменателем 2. Подходящие числа 2, 4, 14, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ и $\frac{13}{2}$ в сумме с собой дадут числа 4, 8, 28, 1, 3 и 13.

Теперь рассмотрим суммы двух различных чисел. Заметим, что сумма двух несократимых дробей может быть целым числом, только если их знаменатели равны. Попарные суммы 2, 4 и 14 дадут 6, 16 и 18; попарные суммы $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ и $\frac{13}{2}$ дадут 2, 7 и 8; попарные суммы $\frac{1}{4}$ и $\frac{11}{4}$ дают 3, других чисел с одинаковыми знаменателями нет.

Получаем всего 11 искомых чисел: это 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 16, 18, 28 (всего мы получили 13 целых сумм, но среди них числа 3 и 8 получили дважды). □

Задача 9.4. Дан квадрат $ABCD$. На плоскости отметили такую точку X, что $AX = AB$ и $\angle ADX = 13°$. Сколько градусов может составлять угол BXA? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 32, 58.



Решение. Заметим, что для точки X есть два варианта расположения: когда угол ADX располагается по ту же сторону от отрезка AD, что и квадрат, или по другую. В обоих случаях точка A является центром описанной окружности треугольника XBD ($AX = AB = AD$), и $\angle BXD = \frac{1}{2}\angle BAD = 45°$ (вписанный угол равен половине центрального). Треугольник XAD является равнобедренным, значит $\angle AXD = \angle ADX = 13°$. Если угол ADX располагается по ту же сторону от отрезка AD, что и квадрат, то $\angle AXB = \angle DXB + \angle AXD = 45° + 13° = 58°$, а если по другую, то $\angle AXB = \angle DXB - \angle AXD = 45° - 13° = 32°$. □

Задача 9.5. На футбольной трибуне кресла стоят в виде прямоугольника, всего мест меньше 2022. После матча некоторые кресла сломались, причём всего сломанными оказались $\frac{1}{99}$ всех кресел. При этом не менее чем в 44% горизонтальных рядов и не менее чем в 44% вертикальных рядов что-то сломалось. Сколько всего кресел на трибуне?

Ответ: 1980.

Решение. Пусть оказалось сломано k кресел, тогда всего кресел было $99k$. Заметим, что $k \leqslant 20$, т.к. $99 \cdot 21 = 2079 > 2000$. С другой стороны, пусть в каждом горизонтальном ряду m кресел, а в вертикальном — n кресел, тогда всего кресел mn. Так как $k \geqslant 0{,}44m$ и $k \geqslant 0{,}44n$, то

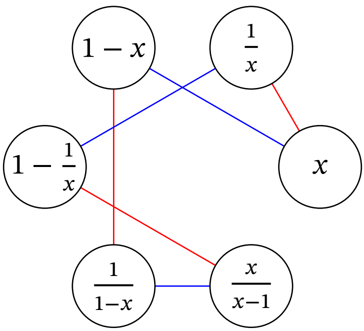
$$k^2 \geqslant 0{,}44^2 mn = 0{,}44^2 \cdot 99k = 19{,}1664k,$$

откуда $k \geqslant 20$. Значит, $k = 20$, и всего кресел было $99 \cdot 20 = 1980$.

Такая ситуация возможна, если $m = 45$, $n = 44$ и всего сломалось 20 кресел: по одному в первых 20 горизонтальных и вертикальных рядах. Так как $\frac{20}{44} > \frac{20}{45} > 0{,}44$, все условия выполнены. □

Задача 9.6. В множестве X содержится $1 \leqslant n \leqslant 20$ различных действительных чисел, все они отличны от 0 или 1. Известно, что если $x \in X$, то $\frac{1}{x} \in X$ и $1 - x \in X$. Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 3, 6, 9, 12, 15, 18.



Решение. Для каждого $x \in X$ рассмотрим набор чисел $\left\{x, \frac{1}{x}, 1-x, 1-\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{x-1}\right\}$. Легко видеть, что все числа набора порождаются любым из них с помощью операций $x \to 1 - x$ (синие отрезки) и $x \to \frac{1}{x}$ (красные отрезки) и что указанные операции не выводят за пределы набора. Из этого следует, что любые два таких набора либо не пересекаются, либо совпадают.

Числа в наборе не обязательно различны: при $x = -1, \frac{1}{2}, 2$ в нём только три различных числа. Во всех остальных случаях все шесть чисел этого набора различны (в этом можно убедиться, приравнивая x к остальным пяти числам; ясно, что если какие-то два числа набора равны, то и x присутствует в наборе более одного раза).

Множество X, очевидно, разбивается на наборы описанного вида. Следовательно, количество его элементов делится на 3. С другой стороны, любое количество элементов, делящееся на 3, можно набрать непересекающимися наборами по шесть элементов, добавив к ним при необходимости набор $\left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

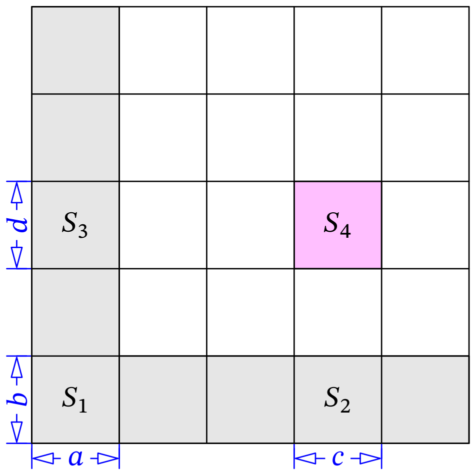
Итак, ответом в задаче являются все натуральные числа, не превосходящие 20, делящиеся на 3: это $3, 6, 9, 12, 15, 18$. $\square$

Задача 9.7. Петя разделил большой прямоугольник 99 вертикальными и 99 горизонтальными прямыми на 10 000 прямоугольников, площади которых неизвестны. За один вопрос можно узнать у Пети значение площади любого из этих 10 000 прямоугольников. За какое наименьшее количество вопросов получится гарантированно узнать площадь большого прямоугольника?

Ответ: 199.

Решение. Предъявим стратегию, позволяющую узнать площадь большого прямоугольника за 199 вопросов.

Узнаем за 199 вопросов площади всех прямоугольников в нижней строке и в левом столбце. Докажем, что теперь можно однозначно восстановить площадь любого маленького прямоугольника на картинке.



Выберем произвольный прямоугольник разбиения. Рассмотрим четыре прямоугольника, лежащих в пересечении первых рядов и рядов, содержащих выбранный прямоугольник. Обозначим их площади и длины сторон как на рисунке. Тогда $S_1 \cdot S_4 = abcd = S_2 \cdot S_3$, откуда неизвестная площадь S_4 выражается через известные площади S_1, S_2, S_3 формулой $S_4 = (S_2 \cdot S_3)/S_1$.

Суммируя площади всех маленьких прямоугольников, находим площадь большого.

Теперь докажем от противного, что меньше чем за 199 вопросов площадь узнать не получится. Рассмотрим двудольный граф, у которого вершины одной доли соответствуют строкам, вершины другой доли соответствуют столбцам, а рёбра соответствуют прямоугольникам на пересечении строк и столбцов, про площади которых спросили у Пети. Так как в графе 200 вершин и меньше 199 рёбер, он несвязный. Значит, граф можно разбить на несколько компонент связности. Выберем одну компоненту.

Рассмотрим все строки и все столбцы, соответствующие вершинам выбранной компоненты. Попробуем увеличить высоты всех рассматриваемых строк в $x > 1$ раз, одновременно уменьшив длины всех рассматриваемых столбцов в x раз. Заметим, что от этого площади всех маленьких прямоугольников, про которые спросили у Пети, не изменятся, так как мы работаем с отдельной компонентой связности.

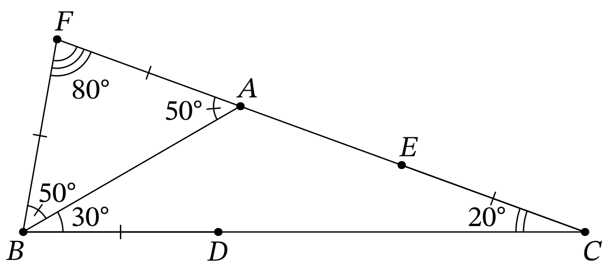
Введём обозначения:
a — сумма высот рассматриваемых строк,
b — сумма высот остальных строк,
c — сумма длин рассматриваемых столбцов,
d — сумма длин остальных столбцов.
Изначально площадь большого прямоугольника была равна $(a+b)(c+d)$, а после изменения стала $(ax+b)(c/x+d)$. Уравнение $(ax+b)(c/x+d) = (a+b)(c+d)$ можно привести к виду

$$adx + bc/x - ad - bc = 0 \iff (1-1/x)(xad - bc) = 0.$$

Если выбрать $x \neq bc/ad$, то площади до и после изменения будут разными, а соответственные ответы Пети в этих двух случаях — одинаковыми. Значит, узнать площадь за меньше чем 199 вопросов наверняка не получится. □

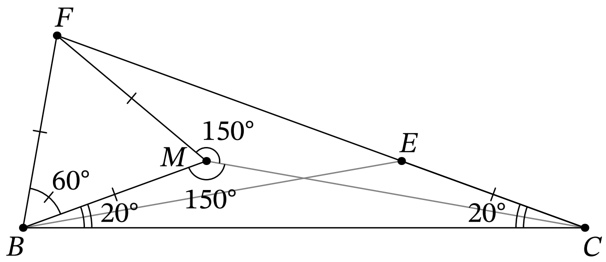
Задача 9.8. Дан треугольник ABC, в котором $\angle C = 20°$, $\angle B = 30°$. Точки D и E на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $AC = CD$, $CE = BD$. Сколько градусов составляет угол BEC?

Ответ: 150.



Решение. На продолжении отрезка CA за точку A отметим точку F такую, что $AF = EC = BD$. Тогда $BC = BD + DC = FA + AC = FC$, то есть треугольник BCF — равнобедренный. Тогда $\angle BFC = \angle FBC = \frac{180°-20°}{2} = 80°$. Поскольку $\angle FBA = \angle FBC - \angle ABC = 80° - 30° = 50°$ и $\angle FAB = 180° - \angle BAC = \angle ABC + \angle ACB = 30° + 20° = 50°$, получаем $BF = FA = EC = BD$.

Отметим внутри треугольника BCF такую точку M, что треугольник BMF — равносторонний. Очевидно, что точки M и C лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BF, поэтому $\angle CMB = \angle CMF = \frac{360^\circ - 60^\circ}{2} = 150^\circ$.



Заметим, что треугольники BMC и CEB равны по двум сторонам и углу между ними: $BM = EC$, BC — общая сторона, $\angle MBC = \angle FBC - \angle FBM = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle ECB$. Следовательно, $\angle BEC = \angle CMB = 150^\circ$. □