Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Демонстрационный вариант.

10 класс. Решения задач

Задача 10.1. Паша выписал на доску в порядке возрастания 6 чисел, являющихся последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Хулиган Ваня стёр два из них, а также дописал одно новое число. В итоге на доске оказались числа

$$12, 26, 33, 38, 47.$$

Найдите наибольшее число, стёртое Ваней.

Ответ: 40.

Решение. Заметим, что если из всех членов исходной арифметической прогрессии вычесть 12, то полученные числа будут образовывать новую арифметическую прогрессию с той же разностью. Сделаем это и с числами на доске, тогда останутся числа

$$0, 14, 21, 26, 35.$$

Среди этих пяти чисел какие-то четыре — члены новой арифметической прогрессии, а одно оставшееся — лишнее. Среди этих четырёх членов какие-то два точно являются соседними в новой арифметической прогрессии, поэтому среди попарных разностей этих пяти чисел точно встречается разность арифметической прогрессии. Перебирая возможные значения $5, 7, 9, \ldots$, легко убедиться, что подходит только разность 7, а сама новая прогрессия имеет вид $0, 7, 14, 21, 28, 35$ (соответственно, число 26 — лишнее). Значит, Ваня стёр числа $7 + 12 = 19$ и $28 + 12 = 40$. □

Задача 10.2. Крош и Ёжик решили узнать, кто быстрее пробежит дистанцию длиной 10 километров по прямой дороге.

В момент старта Крош по ошибке побежал в направлении, перпендикулярном дороге. В какой-то момент он понял, что побежал не туда, и сразу побежал по прямой к финишу. В результате на финише Крош и Ёжик оказались одновременно, хотя Крош бежал в 5 раз быстрее Ёжика. Сколько километров пробежал Крош после того, как понял свою ошибку?

Ответ: 26.

Решение. Поскольку Ёжик пробежал 10 км, а Крош бежал в 5 раз быстрее, то он пробежал 50 км.

Пусть S — точка старта, F — точка финиша, X — точка, где Крош понял о своей ошибке. Мы знаем, что $\angle XSF = 90^\circ$, $SF = 10$, $SX + XF = 50$ (здесь и далее все расстояния выражаем в километрах). Пусть $XS = a$, тогда $XF = 50 - a$. По теореме Пифагора составляем уравнение $a^2 + 10^2 = (50 - a)^2$, откуда находим $a = 24$. Следовательно, искомое расстояние XF составляет 26 км. □

Задача 10.3. Найдите количество четырёхзначных натуральных чисел, у которых в десятичной записи

- нет цифры 0;
- сумма любых двух соседних цифр делится на 3.

Ответ: 243.

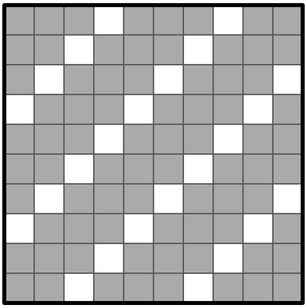
Решение. В числе можно использовать только цифры $1, 2, 3 \ldots, 9$. Легко понять, что для каждой из этих цифр существует ровно 3 цифры, которые в сумме с ней дают число, делящееся на 3.

Первую цифру числа можно выбрать 9 способами. Вторую цифру — 3 способами, третью цифру — тоже 3, четвёртую цифру — тоже 3. Следовательно, всего искомых чисел ровно $9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. □

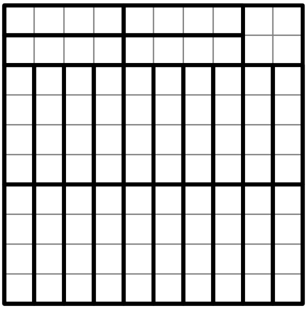
Задача 10.4. Дан белый клетчатый квадрат 10×10. Какое наибольшее количество клеток в нём можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы не нашлось 4 чёрных клеток, идущих подряд по вертикали или горизонтали?

Ответ: 76.

Решение. Сначала приведем пример, в котором закрашено 76 клеток (они обозначены серым):



Чтобы показать, что большее число клеток закрасить не удастся, выделим в данном квадрате 24 непересекающихся прямоугольника 1×4:



Ясно, что в каждом прямоугольнике может оказаться не более 3 закрашенных клеток. Кроме того, ещё не более 4 закрашенных клеток может быть в оставшемся квадратике 2×2. Всего не более $24 \cdot 3 + 4 = 76$. □

Задача 10.5. Дана функция $g(x) = x^2 + px + q$ (где p и q — некоторые действительные числа). Известно, что для любого действительного a найдётся действительное b такое, что $g(b) = g(a) + b$. Какое наибольшее значение может принимать p?

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Из условия следует, что квадратное уравнение $f(b) - b - f(a) = 0$ разрешимо относительно переменной b при любом значении a. Подставив $a = -\frac{p}{2}$, получаем уравнение $b^2 + (p-1)b + \frac{p^2}{4} = 0$, дискриминант которого равен $D = (p-1)^2 - p^2 = 1 - 2p \geqslant 0$, откуда $p \leqslant \frac{1}{2}$.

С другой стороны, при $p = \frac{1}{2}$ при любом a можно выбрать $b = -a$: тогда $f(b) - b - f(a) = (a^2 - \frac{1}{2}a + q) + a - (a^2 + \frac{1}{2}a + q) = 0$, что и требовалось. (Также подходит $b = a + \frac{1}{2}$.) □

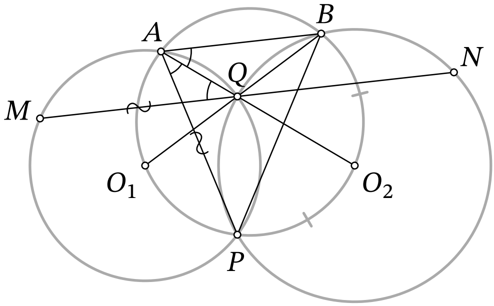


Рис. 1: к решению задачи 10.7

Задача 10.6. На доске записано натуральное число N, не делящееся на 9. Петя заметил следующее: какие цифры в этом числе ни вычёркивай, оставшееся число не делится на 9 (вычёркивать можно одну или несколько цифр, но не все). Какое наибольшее значение может принимать N?

Ответ: 88888888.

Решение. Будем пользоваться признаком делимости на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 9. Соответственно, сумма любых цифр числа на доске не должна делиться на 9.

Очевидно, что число 88888888 подходит.

Предположим, что существует число $N > 88888888$, удовлетворяющее условию. Очевидно, что в его записи нет цифры 9, тогда в нём хотя бы 9 цифр.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_9$ — 9 первых цифр числа N. Рассмотрим 9 сумм $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $S_9 = a_1 + a_2 + \ldots + a_9$. По условию все эти суммы не делятся на 9, поэтому среди них по принципу Дирихле найдутся две суммы S_i и S_j (где $i < j$), дающие одинаковый остаток при делении на 9. Это означает, что их разность $S_j - S_i = a_{i+1} + \ldots + a_j$ делится на 9, что противоречит условию. □

Задача 10.7. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках P и Q. Продолжение отрезка O_1Q за точку Q пересекает ω_2 в точке B, а продолжение отрезка O_2Q за точку Q пересекает ω_1 в точке A. Прямая, параллельная AB и проходящая через точку Q, пересекает ω_1 и ω_2 в точках M и N соответственно. Найдите MN, если $PA = 13$ и $PB = 12$.

Ответ: 25.

Решение. Заметим, что треугольники O_1QA и O_2QB — подобные равнобедренные ($\angle AQO_1 = \angle BQO_2$ как вертикальные). Следовательно, точки A, B, O_1 и O_2 лежат на одной окружности S (рис. 1). Поскольку $\angle O_1PO_2 + \angle O_1AQ = \angle O_1QO_2 + \angle O_1QA = 180°$, на той же окружности лежит и точка P. Углы BAQ и QAP равны как вписанные в окружность S и опирающиеся на равные дуги O_2B и O_2P. Из параллельности прямых AB и MN следует, что $\angle MQA = \angle BAQ$. Следовательно, $\angle MQA = \angle QAP$, и $MAQP$ — равнобокая трапеция. Отсюда $PA = MQ$. Аналогично доказывается, что $PQBN$ — равнобедренная трапеция, поэтому $PB = QN$. Следовательно,

$$MN = MQ + QN = PA + PB = 13 + 12 = 25. \qquad \square$$

Задача 10.8. Петя придумал 2022 различных множества и назвал их Васе. Вася в ответ должен придумать n различных множеств таким образом, чтобы любое множество Пети являлось пересечением каких-то двух различных множеств Васи. При каком наименьшем n Вася сможет гарантированно осуществить задуманное?

Ответ: 2023.

Решение. Пронумеруем множества Пети: $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$. Вася может выбрать следующие 2023 множества: $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2,\ \ldots,\ B_{2022} = A_{2022},\ B_{2023} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{2022} \cup x$ (здесь x — элемент, не принадлежащий ни одному из множеств A_i). Тогда все множества B_i различны, и $A_i = B_{2023} \cap B_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 2022$.

Докажем теперь, что для множеств Пети $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$, $\ldots$, $A_{2022} = \{1, 2, \ldots, 2022\}$ в любом наборе Васи, удовлетворяющем условию, не менее 2023 множеств. Из условия следует, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, 2021$ среди множеств Васи найдется множество B_i, содержащее A_i, но не содержащее A_{i+1} (иначе A_i не может быть пересечением множеств Васи); заметим, что B_i также содержит все множества $A_1, \ldots, A_i$ и не содержит ни одного из множеств $A_{i+1}, \ldots, A_n$; поэтому все множества B_i различны. Кроме того, среди множеств Васи найдутся два множества B_{2022} и B_{2023}, содержащие A_{2022}. Очевидно, что множества $B_1, B_2, \ldots, B_{2023}$ различны. $\square$