Олимпиада «Высшая проба». Математика.

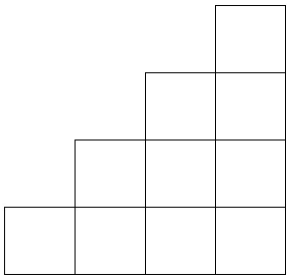
Демонстрационный вариант.

11 класс. Решения задач

Задача 11.1. На доске нарисована «лесенка» (см. рисунок). Сколько существует способов расставить в её клетки числа

$$9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 45$$

так, чтобы во всех четырёх столбцах суммы чисел были одинаковы?



Ответ: 288.

Решение. Легко понять, что в столбце из одной клетки стоит число 45, в столбце из двух клеток — 22 и 23, в столбце из трёх клеток — 14, 15 и 16, в столбце из четырёх клеток — 9, 11, 12 и 13. Числа в столбце могут идти в произвольном порядке, значит в столбце из одной клетки есть 1 способ расстановки, в столбце из двух клеток $2! = 2$ способов расстановки, в столбце из трёх клеток $3! = 6$ способов расстановки, в столбце из четырёх клеток $4! = 24$ способа расстановки. Получаем, что всего способов необходимым образом расставить числа в лесенке равно $1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 24 = 288$. □

Задача 11.2. В десятичной записи числа $\frac{1}{97}$ вычеркнули первую ненулевую цифру после запятой. Получилась десятичная запись несократимой дроби $\frac{p}{q}$ (где p и q — натуральные числа). Найдите $p + q$.

Ответ: 973.

Решение. Так как $97 > 10$, то первая цифра после запятой будет равна 0, а так как $\frac{100}{2} < 97 < 100$, то вторая цифра после запятой будет равна 1. Значит, число записанное оставшимися цифрами, если их сохранить в тех же разрядах, получится равным $\frac{1}{97} - \frac{1}{100} = \frac{3}{9700}$. Но эта цифра зачёркнута, а значит, всё оставшееся число смещается на 1 позицию влево, т.е. умножается на 10. Таким образом, оно окажется равным $\frac{3}{970}$, поэтому ответ $3 + 970 = 973$. □

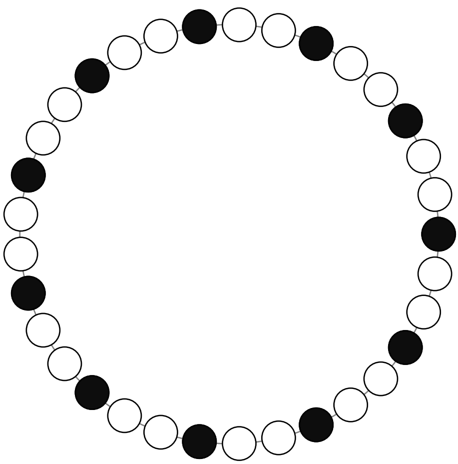
Задача 11.3. По кругу стоят 33 коровы. Некоторые из них чёрные, а остальные — коричневые. Известно, что:

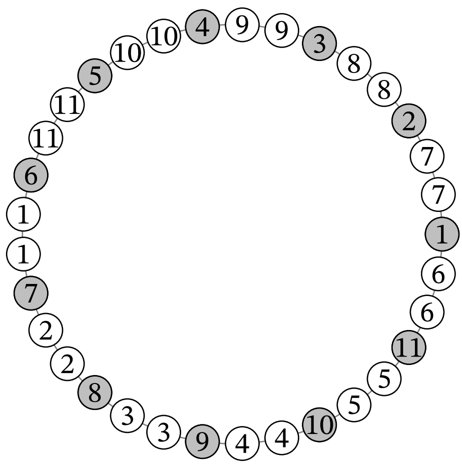
- нет двух соседних чёрных коров;
- нет двух чёрных коров, между которыми ровно 15 других коров.

Какое наибольшее количество чёрных коров может быть?

Ответ: 11.

Решение. Покажем, как поставить 11 чёрных коров. Для этого пронумеруем коров, начиная с какого-то места по часовой стрелке числами от 1 до 33 и поставим чёрных коров на все места, номер которых кратен 3. Тогда между любыми двумя коровами стоит количество коров, имеющее остаток 2 при делении на 3, поэтому это не может быть 15 или 0 коров.





Теперь докажем, что больше 11 чёрных коров поставить нельзя. Разобьём коров на тройки следующим образом. В одну тройку возьмём корову на месте, кратном 3 и двух наиболее удалённых от неё, т.е. через 15 коров в одну и в другую сторону. Заметим, что в каждой тройке не может быть больше одной чёрной коровы, т.к. любые две коровы из тройки либо соседние, либо между ними 15 других коров. Значит, всего коров не больше 11.

□

Задача 11.4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - ax + 2a$ имеет два различных целых корня. Укажите все возможные варианты.

Ответ: $-1, 9$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. По теореме Виета, $x_1 + x_2 = a$ и $x_1 x_2 = 2a$. Значит, $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 0$. Добавим к обеим частям уравнения 4 и разложим левую часть на множители, получим

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 4.$$

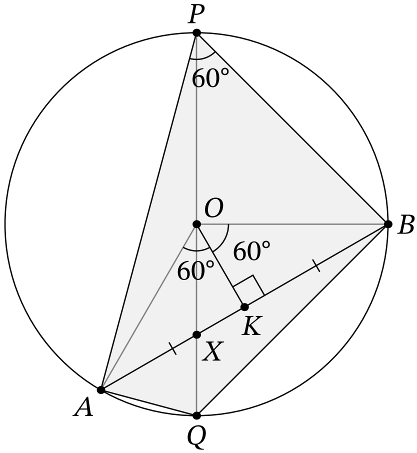
Так как x_1 и x_2 — целые, то каждый из множителей тоже целый, поэтому возможны следующие случаи:

1. $x_1 - 2 = 4$, $x_2 - 2 = 1$. Тогда $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, откуда $a = x_1 + x_2 = 9$.
2. $x_1 - 2 = 2$, $x_2 - 2 = 2$. Тогда $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, но корни должны быть различными.
3. $x_1 - 2 = 1$, $x_2 - 2 = 4$. Тогда $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, откуда $a = x_1 + x_2 = 9$.
4. $x_1 - 2 = -1$, $x_2 - 2 = -4$. Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, откуда $a = x_1 + x_2 = -1$.
5. $x_1 - 2 = -2$, $x_2 - 2 = -2$. Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, но корни должны быть различными.
6. $x_1 - 2 = -4$, $x_2 - 2 = -1$. Тогда $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, откуда $a = x_1 + x_2 = -1$.

Итак, a может принимать значения -1 и 9. □

Задача 11.5. Дана окружность ω с диаметром PQ. Точки A и B выбраны на ω по разные стороны от прямой PQ так, что $\angle APB = 60^\circ$. Отрезки AB и PQ пересекаются в точке X. Найдите площадь четырёхугольника $PAQB$, если $AX = 1$ и $BX = 2$.

Ответ: 4.5.



Решение. Пусть O — середина PQ и центр окружности. Тогда $\angle AOB = 2\angle APB = 120°$. Пусть K — середина AB. Тогда $XK = 1/2$, $KB = 3/2$. В прямоугольном треугольнике OKB находим $OB = \sqrt{3}$, $OK = \sqrt{3}/2$, стало быть $XK : KO = 1 : \sqrt{3}$ и потому $\angle OXK = 60°$. Диаметр $PQ = 2OB = 2\sqrt{3}$. Площадь всего четырёхугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot AB \cdot \sin \angle OXK = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} = 4.5. \qquad \square$$

Задача 11.6. Числа $1, 2, 3, \ldots, 18$ разбили на три непустые группы, и в каждой группе посчитали сумму всех чисел. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее общее кратное этих трёх сумм?

Ответ: $55 \cdot 57 \cdot 59 = 184965$.

Решение. Сначала покажем, как получить $184965 = 55 \cdot 57 \cdot 59$. Для этого сделаем суммы в группах равными 55, 57 и 59 соответственно. Добиться этого можно, например, следующим образом: в первую группу возьмём числа 18, 17, 16 и 4; во вторую группу — числа 15, 14, 13, 12 и 3, а в третью — все оставшиеся. Так как суммы чисел в группах попарно взаимно просты, их НОК равен их произведению, т.е. $55 \cdot 57 \cdot 59$.

Предположим, что мы смогли получить больший НОК. Сумма чисел от 1 до 18 равна $\frac{18 \cdot 19}{2} = 171$. Пусть суммы чисел в группах равны a, b и c. Тогда нам известно, что $a+b+c = 171$, откуда по неравенству о средних получим, что $abc \leqslant (\frac{171}{3})^3 = 57^3$. Заметим, что НОК чисел не больше их произведения.

Если у каких-то двух из чисел a, b, c есть общий делитель $d > 1$, то НОК чисел a, b, c меньше их произведения хотя бы в d раз, т.е. не более $\frac{57^3}{2} < 55 \cdot 57 \cdot 59$. Значит, числа должны быть взаимно простыми. Так как сумма трёх чисел нечётная, среди них должно быть нечётное количество нечётных чисел. С другой стороны, так как числа попарно взаимно простые, то двух чётных среди них быть не может, поэтому все они нечётные.

Кроме того, все три числа должны быть различными. Заметим, что если между минимальным и средним из чисел разница хотя бы 6, то минимальное число можно увеличить на 2, а среднее уменьшить на 2, при этом числа останутся разными, а произведение их увеличится. Аналогичное рассуждение работает для среднего и большего. Значит, разница между соседними числами при максимальном произведении равна либо 2, либо 4. Ситуации вида x, $x+2$, $x+6$ и x, $x+4$, $x+6$ невозможны, так как сумма чисел должна делиться на 3, поэтому наши числа — это либо $x, x+2, x+4$, либо $x, x+4, x+8$. Во второй ситуации можно минимальное увеличить на 2, а максимальное уменьшить на 2, отчего произведение только увеличится. Значит, наши числа — это x, $x+2$, $x+4$, откуда $x = 55$, $x+2 = 57$, $x+4 = 59$. □

Задача 11.7. В стране 45 городов. Любые два города соединены не более, чем одной дорогой. Известно, что если из двух городов выходит одинаковое количество дорог, то между собой они дорогой не соединены. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

Ответ: 870.

Решение. Для каждого города рассмотрим количество отсутствующих у него дорог. Разобьём все города на группы с одинаковыми количествами отсутствующих дорог. Заметим, что каждый город не соединён со всеми городами своей группы. Поэтому, в такой группе не может быть больше $n+1$ города (иначе у каждого из них должно отсутствовать большее количество дорог). Тогда есть не более одного города с 0 отсутствующими дорогами, не более двух городов с 1 отсутствующей дорогой, не более трёх — с 2 и т.д.

Значит, максимальное количество дорог будет достигаться, когда группы с количествами отсутствующих дорог от 0 до 8 будут максимально заполнены. Примером является ситуация, когда для всех i от 1 до 9 мы сделаем группу из i городов и проведём дороги между любыми двумя городами из разных групп, а между городами из одной группы проводить не будем. Всего дорог при этом будет проведено

$$\frac{45 \cdot 44}{2} - \frac{1}{2}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 8 \cdot 9) = 990 - 120 = 870. \qquad \square$$

Задача 11.8. Дан куб с ребром, равным 4. Точка A находится в его вершине, а точки B и C — на его рёбрах. Известно, что $AB = 5$ и $AC = 6$. Чему может быть равно BC^2? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 5, 17, 21.

Решение. Назовём X вершину куба, противоположную A. Покрасим рёбра куба в 3 цвета: прилежащие к A покрасим в красный, прилежащие к X покрасим в зелёный, а все остальные покрасим в синий. Заметим, что для любой точки красного ребра расстояние до A не больше 4; для каждой точки синего ребра расстояние до A лежит в промежутке от 4 до $4\sqrt{2}$; для каждой точки зелёного ребра расстояние до A лежит в промежутке от $4\sqrt{2}$ до $4\sqrt{3}$. Так как $5 \in (4; 4\sqrt{2})$ и $6 \in (4\sqrt{2}; 4\sqrt{3})$, то точка B лежит на синем ребре, а точка C на зелёном.

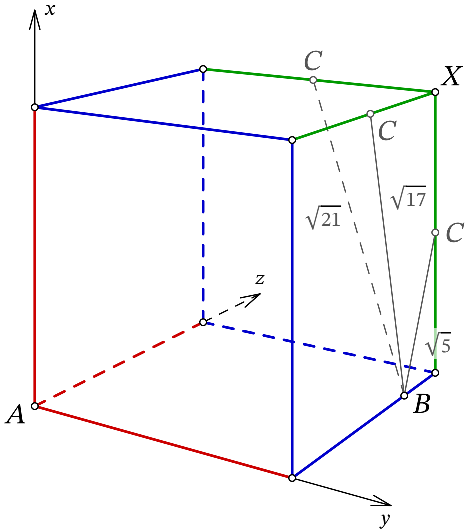


Рис. 1: к решению задачи 11.8

Введём координаты с началом в точке A и осями вдоль ребер куба так, чтобы точка B имела координаты $(0; 4; z)$, и найдём z (рис. 1). Так как $4^2 + z^2 = 5^2$, то $z = 3$. Точка C может располагаться на любом из зелёных рёбер, причём две её координаты равны 4, поэтому оставшаяся будет равна $\sqrt{6^2 - 4^2 - 4^2} = 2$. Рассмотрим все три случая.

1. Точка C имеет координаты $(2, 4, 4)$, тогда $BC^2 = (2-0)^2 + (4-4)^2 + (4-3)^2 = 5$.
2. Точка C имеет координаты $(4, 2, 4)$, тогда $BC^2 = (4-0)^2 + (2-4)^2 + (4-3)^2 = 21$.
3. Точка C имеет координаты $(4, 4, 2)$, тогда $BC^2 = (4-0)^2 + (4-4)^2 + (2-3)^2 = 17$. □