Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет Математики

Методические рекомендации и демонстрационная версия
олимпиады студентов и выпускников «Высшая лига» по направлению «Математика»

Москва, 2023 год

Методические указания участникам олимпиады

Направление: «140.Математика»

Олимпиада "Высшая лига" по направлению "Математика" призвана выявить наиболее подготовленных выпускников и студентов математических специальностей, а также даёт возможность поступить вне конкурса на магистерские программы факультета математики. Олимпиада проводится в два этапа.

Первый (отборочный) этап

Задание первого (отборочного) этапа включает 10 тестовых вопросов с численными ответами. Ответы проверяются автоматически. Правильный ответ на каждый вопрос оценивается в 10 баллов. В сумме участник может набрать 100 баллов. Продолжительность первого этапа – 120 минут.

Второй (заключительный) этап

Вариант заданий заключительного этапа олимпиады состоит из 8 задач. Первые 4 задачи соответствуют общей части программы, задачи 5 и 6 – части "Математика", задачи 7 и 8 – части "Математическая физика".

Стоимость каждой задачи в баллах будет указана в варианте олимпиады. Суммарно можно набрать 100 баллов. Если сумма баллов больше 100, то результат приравнивается к 100 баллам.

При подведении итогов учитываются шесть лучших задач.

Задачи можно решать и записывать в любом порядке. Черновики тоже проверяются. Использование каких бы то ни было справочных материалов, в том числе размещенных в интернете, строго запрещено, равно как и всякое общение участников олимпиады друг с другом.

Информация для поступающих в магистратуру

Медалисты и дипломанты олимпиады имеют возможность поступить вне конкурса на магистерские программы факультета математики. Выбор специализации "Математика" или "Математика и математическая физика" на магистерской программе "Математика" не зависит от задач, которые решил участник олимпиады.

Подробные условия поступления победителей и призёров олимпиады доступны на сайте https://ma.hse.ru/.

Тематика заданий

Общая часть (первые четыре задачи)

- Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки, мультиномиальные коэффициенты, производящие функции) и основы теории вероятностей (независимость событий и случайных величин, условные вероятности, математическое ожидание, дисперсия, распределение и плотность случайной величины).

- Элементарная алгебра: поле комплексных чисел, формальные степенные ряды и многочлены, выражение симметрических функций от корней многочлена через его коэффициенты, а коэффициентов — через корни, полиномиальная интерполяция, кратные корни, алгоритм Евклида для многочленов, разложение рациональной функции на простейшие дроби и в степенной ряд, действия с формальными степенными рядами, степенные ряды экспоненты, логарифма и тригонометрических функций. Симметрические группы, знак и цикловой тип перестановки.

- Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, прямые суммы и тензорные произведения, двойственное пространство, решение систем линейных уравнений, определители, характеристический и минимальный многочлены матрицы, тождество Гамильтона – Кэли, собственные числа и собственные векторы, жорданова нормальная форма комплексной матрицы, вычисление аналитических функций от матриц и операторов, билинейные и квадратичные формы, ортогонализация, индекс вещественной квадратичной формы.

- Евклидова геометрия пространства $\mathbb{R}^n$: расстояние от точки до подпространства, углы между прямыми и гиперплоскостями, евклидов объём параллелепипеда и симплекса.

- Одномерный и многомерный вещественный анализ: пределы последовательностей и функций, числовые и функциональные ряды, ряд Тейлора, свойства непрерывных функций, дифференциал отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, производные сложных и неявных функций, отыскание условных и безусловных экстремумов, определённый интеграл, сведение многомерных интегралов к повторным одномерным, несобственные интегралы, вычисление длины кривой и площади поверхности с помощью интегрирования. Равномерная непрерывность функций, равномерная сходимость функциональных последовательностей. Гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, их касательные пространства.

- Основы комплексного анализа: комплексная производная функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, голоморфные и мероморфные функции, ряды Лорана и радиус сходимости, интеграл Коши, теорема о вычетах, вычисление интегралов (включая неопределённые) при помощи вычетов. Многозначные функции, аналитическое продолжение вдоль пути.

- Обыкновенные дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности решения, элементарные приёмы интегрирования (разделение переменных, однородные уравнения, линейные уравнения первого и второго порядка, уравнения в дифференциалах, интегрирующий множитель), системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, уравнения с частными производными первого порядка, метод характеристик. Определитель Вронского.

- Элементы теории групп: подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, теоремы о гомоморфизмах, фактор группы, прямое произведение групп, классы сопряжённости. Группы симметрий геометрических объектов, в частности, правильных многоугольников и многогранников. Матричные группы Ли GL_n, SL_n, SO_n, SU_n и их алгебры Ли.

Задачи 5 и 6 (часть “Математика”)

- Элементы коммутативной алгебры: коммутативные кольца и их гомоморфизмы, идеалы и фактор кольца, максимальные идеалы, кольца вычетов и китайская теорема об остатках, классификация конечно порождённых абелевых групп, факториальность кольца многочленов от многих переменных, поля и гомоморфизмы полей, характеристика, простые расширения полей, описание и примеры конечных полей.

- Элементы геометрии: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, взаимное расположение проективных и аффинных подпространств, выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, опорное полупространство, аффинные и проективные кривые и поверхности второго порядка (квадрики и коники).

- Элементы некоммутативной алгебры: ассоциативные кольца и алгебры, модули над ними, неприводимость и лемма Шура, полная приводимость комплексных и вещественных линейных представлений конечной группы, характеры, количество неприводимых комплексных представлений конечных групп, сумма квадратов размерностей неприводимых представлений. Неприводимые представления групп D_n, S_3, S_4, A_4. Ассоциативные кольца и алгебры.

- Элементы топологии: открытые, замкнутые и компактные подмножества в $\mathbb{R}^n$, всюду плотные и нигде не плотные множества, топологические пространства и их конечные прямые произведения, компактность, связность, внутренность и замыкание, непрерывные отображения, гомотопии, триангуляции, накрытия, фундаментальная группа, деформационная ретракция.

- Продвинутый анализ: мера и интеграл Лебега, теорема Фубини, примеры бесконечномерных нормированных и гильбертовых векторных пространств (пространства непрерывных, суммируемых и суммируемых с квадратом функций). Геометрия гильбертовых пространств, ряды Фурье в гильбертовом пространстве, тригонометрический базис в пространстве L^2, тригонометрический ряд Фурье.

Задачи 7 и 8 (часть “Математическая физика”)

- Основы классической механики: законы Ньютона, условия потенциальности силы, работа силы вдоль траектории, лагранжиан и уравнения движения (уравнения Эйлера–Лагранжа) для механической системы в поле потенциальных сил, симметрии и законы сохранения (теорема Нётер), Гамильтоновы уравнения движения, скобки Пуассона, канонические преобразования.
- Классическая электродинамика: закон Кулона, поле и потенциал, поля и энергия взаимодействия простейших конфигураций зарядов (сферы, плоскости, точечные заряды), движение заряженной частицы в однородном магнитном и электрическом поле, сила Лоренца, уравнения Максвелла, связь потенциала и стационарной плотности распределения заряда (уравнение Пуассона).

Рекомендуемая литература

В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Ижевск: РХД, 2000.

В. И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, М: Фазис, 1999.

Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, М: Факториал 1999.

О. Я. Виро, О. А. Иванов, В. М. Харламов, Н. Ю. Нецветаев, *Элементарная топология*, СПГУ, 2007.

И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, М: Наука 1971.

А. Л. Городенцев, *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Части I, II*, http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf, http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

А. Л. Городенцев, *Геометрия*, http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_total.pdf.

В. А. Зорич, *Математический анализ*, М: МЦНМО, 2007

А. Я. Хелемский. *Лекции по функциональному анализу*. М.: МЦНМО, 2004.

В. И. Богачёв, О. Г. Смолянов. *Действительный и функциональный анализ*. М.-Ижевск: РХД, 2011.

М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, М: Наука, 1973.

В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, М: МЦНМО, 1997.

В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Едиториал УРСС, 2004.

В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения, Том 1*, М.: Мир, 1967

Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Лань, 2004.

В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, М: Наука, 1979.

Г. Голдстейн, *Классическая механика*, М., Наука, 1974.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, М: Физматлит, 2004.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, М: Физматлит, 2004.

Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников “Высшая лига”

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ 2024

Первые четыре части соответствуют общей части программы, задачи 5 и 6 части “Математика”, задачи 7 и 8 части “Математическая физика”. Выбор специализации “Математика” или “Математика и математическая физика” на магистерской программе “Математика” остается на усмотрение дипломанта и не зависит от того, какие задачи он решал на олимпиаде.

Направление: **«140.Математика»**

Время выполения задания — **210 минут**

1. [20 баллов] Назовем рогаткой объединение отрезка и двух лучей на плоскости, причём отрезок и оба луча имеют общий конец. Здесь лучи различны, отрезок не принадлежит ни одному из лучей. Назовем рогатки эквивалентными, если их можно совместить аффинным преобразованием плоскости. Опишите классы эквивалентности рогаток.

2. [20 баллов] Зафиксируем треугольник ABC площади 1, вершину A и сторону AB. Выберем случайно и независимо точку X на стороне AB и точку Y внутри треугольника ABC. Покажите, что математическое ожидание площади треугольника AXY не зависит от выбора исходного треугольника, и найдите его.

3. [20 баллов] При каких натуральных n существует комплексная 4×4 матрица X такая, что

$$X^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Для каждого такого n приведите пример такой матрицы.

4. [20 баллов] Функция $x(t) = e^{1/t} + \frac{1}{t}$ на области своего определения является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

причём функция f – непрерывна.
а) Существует ли у этого уравнения решение, определённое на всей прямой?
б) Опишите все решения дифференциального уравнения, определённые на всевозможных интервалах.

5. [30 баллов] Найдите все комплексно-аналитические функции на $\mathbb{C}$, которые переводят любую окружность с центром в нуле в окружность с центром в нуле.

6. [30 баллов] Для простого p обозначим через $\mathbb{F}_p$ поле из p элементов. Пусть $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ – неприводимый многочлен степени $n \geq 1$. Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{F}_p[x]/(q(x)) \to \mathbb{F}_p[x]/(q(x)), \quad [f(x)] \mapsto [f(x^p)] \; \forall f \in \mathbb{F}_p[x]$$

Докажите, что φ корректно определено, является линейным отображением векторных пространств над $\mathbb{F}_p$ и найдите его минимальный многочлен.

7. [30 баллов] Гладкий жесткий стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг фиксированной вертикальной оси по заданному закону $\varphi(t)$, где угол φ отсчитывается от некоторого направления в плоскости вращения стержня. По стержню без трения может скользить материальная точка массы m.

а) Выбрав подходящие обобщенные координаты, составьте лагранжиан этой механической системы и выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа.

б) Приведите формулы для всех интегралов движения (если они есть).

в) Найдите зависимость от времени модуля силы реакции стержня при его равномерном вращениии: $\dot{\phi}(t) = \omega = \text{const}$.

8. [30 баллов] Одномерный гармонический осциллятор задается гамильтонианом

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

а) Считая начальные данные q_0 и p_0 канонически сопряженными переменными со скобкой Пуассона

$$\{q_0, p_0\} = 1,$$

докажите, что решения уравнений движения $q(t)$ и $p(t)$ в любой момент времени тоже образуют пару канонически сопряженных величин:

$$\{q(t), p(t)\}_{q_0, p_0} = 1.$$

б) Найдите производящую функцию первого рода $F_1(q_0, q(t), t)$, отвечающую каноническому преобразованию временной эволюции

$$(q_0, p_0) \to (q(t), p(t)).$$

в) Найдите производящую функцию второго рода $F_2(q_0, p(t), t)$, отвечающую каноническому преобразованию временной эволюции.

Критерии оценивания работ заключительного тура

Решение каждой задачи оцениваются согласно следующим общим критериям:

- 100% баллов за задачу – дано полное решение задачи;
- порядка 75% баллов за задачу – дано решение задачи с пробелами технического характера (то есть связанными с владением техникой в предметной области задачи);
- порядка 50% баллов за задачу – в решении задачи получены значительные продвижения,но имеются концептуальные пробелы (т.е. связанные с владением понятийным аппаратом в предметной области задачи);
- порядка 25% баллов за задачу – попытка решения в целом не успешна, но содержит верные соображения;
- до 25% баллов за задачу может сниматься за арифметические ошибки, не меняющие ход решения, за некорректное использование математических обозначений за другие недочеты, не связанные с содержательной частью решения;
- Ответ, приведенный без обоснования, оценивается в 0 баллов, вне зависимости оттого, верный он или нет.