

**Демонстрационный вариант и методические рекомендации
по направлению “Прикладная математика и информатика”**

Профиль: “Математическое моделирование”

Все ответы при решении задач требуется обосновать. Время выполнения заданий 3 часа.

1. (4 балла) Сколькими способами из студенческой группы в 30 человек можно выбрать 10 так, чтобы никакие два из выбранных не были бы соседями в алфавитном списке группы?

2. Профессор Рассеянный построил частичный порядок P для утреннего одевания. Одни вещи нужно надевать раньше других, например, очки раньше носков, что записывается как $\text{очки} \prec \text{носки}$:

P : очки \prec брюки \prec ремень \prec пиджак, очки \prec рубашка \prec галстук \prec пиджак, брюки \prec туфли, очки \prec носки \prec туфли, очки \prec часы.

(а) (1 балл) Помогите профессору построить граф частичного порядка для утреннего одевания.

(б) (1 балл) Постройте линейный порядок L на вещах так, чтобы исходный порядок их одевания не был нарушен (т.е. $aPb \rightarrow aLb$).

(в) (4 балла) Сколько всего существует таких линейных порядков?

3.

(а) (2 балла) Разложите функцию $1/(1+x^2)^2$ в ряд Тейлора в окрестности точки 0.

(б) (2 балла) Вычислите радиус сходимости полученного ряда.

4.

(а) (3 балла) Определите тип особой точки $(x = 0, y = 0)$ следующей системы дифференциальных уравнений в зависимости от параметра a :

$$\begin{cases} x' = 1/(y+1) - 1, \\ y' = \sin(x+ay). \end{cases}$$

(б) (3 балла) Исследуйте эту систему на устойчивость.

5. Пусть $f(x, y) = \max(x^2 - y^3, -x^3 + y^2)$.

(а) (1 балл) Вычислите производную функции $f(x, y)$ по направлению $l = (1, 1)$ в точке $(0, 0)$.

(б) (2 балла) Докажите, что данная функция не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

(в) (2 балл) Является ли точка $(0, 0)$ точкой экстремума данной функции?

6. (7 баллов) Докажите, что для любого действительного $x > 0$ и любого натурального n выполняются неравенства

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}(e^x - 1).$$

7. (7 баллов) Найдите квадратную матрицу X из уравнения

$$AX = 7X,$$

если A — заданная квадратная матрица порядка 10, удовлетворяющая условию

$$A^3 - 2A^2 + A = E,$$

где E — единичная матрица порядка 10.

8. (8 баллов) Докажите, что из собственных векторов линейного оператора, заданного следующей матрицей, можно составить базис n -мерного комплексного пространства \mathbb{C}^n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

9.

(а) (2 балла) Приведите пример линейной самодвойственной булевой функции, зависящей от 10 переменных. Напомним, что булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется самодвойственной, если для любых x_1, \dots, x_n

$$\overline{f(x_1, \dots, x_n)} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

(б) (3 балла) Сколько существует функций, удовлетворяющим условиям п. (а)?

10. (8 баллов) Известно, что у плоского графа все вершины, не принадлежащие внешней грани, чётной степени. Какого наименьшего количества цветов достаточно для такой раскраски всех его граней, чтобы грани, имеющие общее ребро, были покрашены в разные цвета? Ответ требуется обосновать (доказать, что данного количества цветов достаточно и привести пример графа с описанными свойствами, при раскраске граней которого нельзя обойтись меньшим количеством цветов).

Методические рекомендации

Тематика письменной работы соответствует разделам прикладной математики и информатики, обозначенным в Государственном образовательном стандарте высшего профессионального образования по направлению подготовки бакалавра 010500.62 “Прикладная математика и информатика”:

1. Математический анализ
2. Дифференциальные уравнения
3. Линейная алгебра
4. Методы оптимизации
5. Теория вероятностей и математическая статистика
6. Дискретная математика

7. Информатика

Для подготовки к олимпиаде рекомендуются следующие учебные пособия:

1. Ильин В.А. Линейная алгебра.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1,2
4. Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, т.1-3.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под редакцией Б.П. Демидовича.
6. Л.С.Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения
7. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
8. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.
9. Крамер Г. Математические методы статистики.
10. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика.
11. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера.
12. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
13. Оре О. Теория графов.