Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2011 г.

Демонстрационный вариант и методические рекомендации
по направлению «Математика»

Профили:
«Математика»
«Математическая физика»

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполения задания — 240 минут

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

1. Пусть n — число упорядоченных троек (A_1, A_2, A_3), состоящих из множеств A_1, A_2, A_3, таких, что

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\},$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

Найдите разложение числа n на простые множители.

1. Let n be the number of ordered triples (A_1, A_2, A_3) consisting of sets A_1, A_2, A_3 such that

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\},$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

Find the prime factorization of n.

2. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}?$$

2. Does the following series converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}?$$

3. Пусть G — конечная группа, а $\alpha : G \to G$ — автоморфизм группы G, такой, что $\alpha(x) = x$ только если x является единичным элементом. Докажите, что всякий элемент группы G может быть представлен в виде $x^{-1}\alpha(x)$, где $x \in G$.

3. Let G be a finite group, and $\alpha : G \to G$ an automorphism of G such that $\alpha(x) = x$ only if x is the identity. Prove that every element of the group G can be represented in the form $x^{-1}\alpha(x)$, where $x \in G$.

4. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задан эллипсоид с главными полуосями a, b, c. Вокруг него произвольным образом описан прямоугольный параллелепипед (так, что эллипсоид касается каждой из граней параллелепипеда). Найдите длину главной диагонали параллелепипеда.

4. In the Euclidean space $\mathbb{R}^3$, an ellipsoid with semi-principal axes of lengths a, b, c is given. A rectangular parallelepiped is circumscribed around it so that the ellipsoid is tangent to all faces of the parallelepiped. Compute the length of the principle diagonal in the parallelepiped.

5. Решите уравнение $u_t = -u^2 u_x$ с начальным условием $u(x, 0) = \cos x$. Найдите максимальное значение T, такое, что неособое решение существует на множестве $t \in [0, T)$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Solve the initial value problem $u_t = -u^2 u_x$, $u(x, 0) = \cos x$. Find the maximal value of T such that a non-singular solution exists on the set $t \in [0, T)$, $x \in \mathbb{R}$.

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните <u>только один</u> из следующих блоков заданий специальной части.

Блок 1. «Математика»

1. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем действительных чисел. Суммой $A + B$ множеств $A, B \subset V$ называется множество всех векторов вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$. Для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$ множество λA опреляется как множество всех векторов вида λa, где $a \in A$. Докажите, что открытое множество A удовлетворяет равенству $A + A = 2A$ тогда и только тогда, когда A выпукло.

1. Let V be a finite dimensional vector space over the field of real numbers. The sum $A + B$ of sets $A, B \subset V$ is defined as the set of all vectors of the form $a + b$, where $a \in A$, $b \in B$. For any $\lambda \in \mathbb{R}$, the set λA is by definition the set of all vectors of the form λa, where $a \in A$. Prove that an open set A satisfies the equality $A + A = 2A$ if and only if A is convex.

Блок 2. «Математическая физика»

1. Грузик массы m на двух пружинах жесткости k подвешен между вертикальными стенками. В исходном положении обе пружины ориентированы горизонтально и не испытывают натяжения, грузик находится на расстоянии ℓ от каждой из стен. Силы тяжести нет. В начальный момент времени грузику придается скорость v_0 в вертикальном направлении. Определите зависимость скорости грузика от его положения.

1. A point mass m is attached to two springs of spring constant k that are connected to two vertical walls. Initially, both springs are horizontal and relaxed, the mass is on distance ℓ from each of the walls. There is no gravity. At the initial moment, the mass has a vertical velocity of absolute value v_0. Determine the dependence of the velocity of the mass on its position.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Задачи на математической олимпиаде, как правило, немного сложнее, чем на экзамене в магистратуру. Решение этих задач требует не только определенной теоретической подготовки, но и оригинальной стратегии решения. Теоретическая подготовка должна включать следующие темы (в рамках стандартной программы математических факультетов):

- общая алгебра (включая теорию групп и элементы комбинаторики)
- линейная алгебра
- математический анализ (включая многомерный анализ и теорию меры)
- комплексный анализ
- обыкновенные дифференциальные уравнения
- простейшие методы теории уравнений с частными производными

Задачи блока «Математическая физика» могут также использовать основные понятия классической механики. Для решения некоторых задач блока «Математика» необходимо знакомство с топологией (общая топология, фундаменальные группы). В варианте олимпиадного задания, конечно, могут быть представлены не все из перечисленных тем.

Содержание следующих книг и учебных пособий полностью покрывает необходимый теоретический материал.

- Э.Б. Винберг, Курс алгебры, М: Факториал 1999
- А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль I, записки лекций `http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-1/m1_total.pdf`
- И.Р. Шафаревич, Основные понятия алгебры, Ижевск: РХД 1999
- И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971
- В.А. Зорич, Математический анализ, М: МЦНМО 2007
- А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976
- В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров, Геометрия, М: МЦНМО 1997
- Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ, Лань 2004
- В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Ижевск: РХД 2000
- В.И. Арнольд, Математические методы классической механики, Москва: Наука 1979
- В.И. Арнольд, Лекции об уравнениях с частными производными, М: Фазис 1999
- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Механика, Москва: Физматлит, 2004
- О.Я. Виро, О.А. Иванов, В.М. Харламов и Н.Ю. Нецветаев, Элементарная топология, `http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman/rus-book.pdf`