РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ экзамена 22 июля 2011

Вариант 1. **Задача 1. (10 баллов)**

Найдите и классифицируйте экстремумы функции:

$$f(x,y,z)=2x-y+3z$$

при ограничении $x^2+y^2+z^2=14$.

Решение: **Вариант 1.** **Задача 1**

Выписываем функцию Лагранжа: $L=2x-y+3z-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-14\right)$.

Условия первого порядка: $\begin{cases} -2\lambda x+2=0, \\ -2\lambda y-1=0, \\ -2\lambda z+3=0, \\ -x^2-y^2-z^2+14=0. \end{cases}$

Решения системы (критические точки):

Точка A: $\left[x=2,\ y=-1,\ z=3,\ \lambda=\frac{1}{2}\right]$, $f(A)=14$;

Точка B: $\left[x=-2,\ y=1,\ z=-3,\ l=-\frac{1}{2}\right]$, $f(B)=-14$.

Из геометрических соображений очевидно, что одна из точек есть минимум, а другая — максимум. (График функции есть гиперплоскость, которая ограничивается на сферу).

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе: $\begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ -2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$.

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в A: $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & -6 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Миноры: $\Delta_4=-56<0$, $\Delta_3=20>0$, максимум.

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в B: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Миноры: $\Delta_4=-56<0$, $\Delta_3=-20<0$, минимум.

Вариант 2. **Задача 1. (10 баллов)**

Найдите и классифицируйте экстремумы функции:

$$f(x,y,z)=x+2y+3z$$

при ограничении $x^2+y^2+z^2=14$.

Решение: **Вариант 2.** **Задача 1**

Выписываем функцию Лагранжа: $L=x+2y+3z-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-14\right)$.

Условия первого порядка: $\begin{cases} -2\lambda x + 1 = 0, \\ -2\lambda y + 2 = 0, \\ -2\lambda z + 3 = 0, \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 14 = 0. \end{cases}$

Решения системы (критические точки):

Точка A: $\left[x = 1,\ y = 2,\ z = 3,\ \lambda = \frac{1}{2} \right]$, $f(A) = 14$;

Точка B: $\left[x = -1,\ \ y = -2,\ \ z = -3,\ \ \lambda = -\frac{1}{2} \right]$, $f(B) = -14$.

Из геометрических соображений очевидно, что одна из точек есть минимум, а другая — максимум (ограничение линейной функции на сферу).
Из найденных критических точек A — максимум, B — минимум.

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе: $\begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ -2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$.

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в A: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Миноры: $\Delta_4 = -56 < 0$, $\Delta_3 = 20 > 0$, максимум.

На всякий случай, окаймленная матрица Гессе в B: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Миноры: $\Delta_4 = -56 < 0$, $\Delta_3 = -20 < 0$, минимум.

Вариант 1. Задача 2. (10 баллов)

а) (4 балла) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 - 3A + I_n = 0$. (I_n — единичная матрица).
Может ли матрица A быть вырожденной? Невырожденной?

б) (2 балла) $n \times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 = 0$. Следует ли отсюда, что $A = 0$? ($n > 1$).

в) (4 балла) Множество многочленов степени 3, $M = \left\{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \right\}$ является линейным пространством относительно естественных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число. Рассмотрим линейное преобразование $M \xrightarrow{A} M$, такое, что $(Af)(x) = xf'(x)$. Найдите собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

Решение: **Вариант 1. Задача 2**

а) $I_n = A(3I_n - A) = AB$, т.е. существует обратная матрица B, т.е. матрица A невырожденная.

б) Для $n=1$ следует, т.к. из $a^2=0$ следует $a=0$. Для $n>1$ это не верно, например, $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $A^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$.

в) Рассмотрим базис $\{1, x, x^2, x^3\}$ в этом базисе матрица оператора имеет вид $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$, т.е. собственные числа равны 0, 1, 2, 3 и соответствующие собственные векторы $1, x, x^2, x^3$.

Вариант 2. **Задача 2. (10 баллов)**

а) (4 балла) $n\times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2+2A+I_n=0$. (I_n — единичная матрица).

Может ли матрица A быть вырожденной? Невырожденной?

б) (2 балла) $n\times n$ матрица A удовлетворяет соотношению $A^2=A$. Следует ли отсюда, что есть только две возможности: $A=0$ или $A=I_n$? ($n>1$).

в) (4 балла) Множество многочленов степени 3, $M=\{f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\}$ является линейным пространством относительно естественных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число. Рассмотрим линейное преобразование $M\xrightarrow{A}M$, такое, что $(Af)(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Найдите собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

Решение: **Вариант 2.** **Задача 2**

а) $I_n=A(-2I_n-A)=AB$, т.е. существует обратная матрица B, т.е. матрица A невырожденная.

б) Для $n=1$ следует, т.к. из $a^2=a$ следует $a_1=0,\ a_2=1$. Для $n>1$ это не верно, например, $A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$, $A^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$.

в) Рассмотрим базис $\{1, x, x^2, x^3\}$ в этом базисе матрица оператора имеет вид $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, т.е. все собственные числа равны 0. Собственные векторы находятся из условия $(Af)(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3-a_0}{x}=a_1+a_2x+a_3x^2=0$, откуда $a_1=a_2=a_3=0$, т.е. имеется единственные (с точностью до множителя) собственный вектор $f(x)=1$.

Вариант 1. **Задача 3. (10 баллов)**

Имеется матрица: $A=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}$.

а) (3 балла) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы A.

б) (2 балла) Пусть $\vec{x}$ — вектор-столбец подходящего размера и $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$. Какие значения может принимать функция $f(\vec{x})$ при произвольном векторе $\vec{x}$?

в) (5 баллов) Обозначим через $\|A\| = [tr(A^T A)]^{1/2}$ норму матрицы A.

(A^T — транспонированная матрица, $tr(B)$ — след матрицы B).

Решение: **Вариант 1.** **Задача 3**

а) Характеристическое уравнение $(4-\lambda)(4-\lambda)-4=0$, собственные числа: 6, 2.

Нормированные собственные векторы: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ для $\lambda = 6$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ для $\lambda = 2$.

б) Собственные числа положительные. Значит квадратичная форма принимает только неотрицательные значения.

в) Матрица A представима в виде $A = CDC^{-1}$, где $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ — ортогональная матрица, а $D = \begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ — диагональная. Значит $A^n = CD^nC^{-1} = CD^nC^T$; $D^n = \begin{bmatrix}6^n & 0\\0 & 2^n\end{bmatrix}$.

$$\|A^n\|^2 = [tr((A^n)^T A^n)] = tr((CD^nC^T)^T CD^nC^T) = tr\left(CD^nC^TCD^nC^T\right) = tr\left(CD^{2n}C^T\right) =$$
$$= tr\left(D^{2n}C^TC\right) = tr(D^{2n}) = 6^{2n} + 2^{2n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|A^n\|}A^n = C\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|A^n\|}D^n\right)\cdot C^T = C\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|A^n\|}D^n\right)\cdot C^T = C\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(6^{2n}+2^{2n})^{1/2}}\begin{pmatrix}6^n & 0\\0 & 2^n\end{pmatrix}\right)\cdot C^T =$$
$$= C\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\cdot C^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

Вариант 2. **Задача 3. (10 баллов)**

Имеется матрица: $A = \begin{pmatrix}7 & 4\\4 & 1\end{pmatrix}$

а) (3 балла) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы A.

б) (2 балла) Пусть $\vec{x}$ — вектор-столбец подходящего размера и $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$. Какие значения может принимать функция $f(\vec{x})$ при произвольном векторе $\vec{x}$?

в) (5 баллов) Обозначим через $\|A\| = [tr(A^T A)]^{1/2}$ норму матрицы A.

(A^T — транспонированная матрица, $tr(B)$ — след матрицы B).

Найдите $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|A^n\|}A^n$.

Решение: **Вариант 2.** **Задача 3**

а) Характеристическое уравнение $(7-\lambda)(1-\lambda)-16=0$, собственные числа: 9, –1.

Собственные векторы: $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ для $\lambda = 9$ и $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ для $\lambda = -1$.

б) Собственные числа разного знака. Значит квадратичная форма принимает любые значения.

в) Матрица A представима в виде $A = CDC^{-1}$, где C — ортогональная матрица. Значит $A^n = CD^nC^{-1} = CD^nC^T$.

В нашем случае: $C=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $D^n=\begin{pmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$,

$$\left\|A^n\right\|^2=[tr((A^n)^T A^n)]=tr((CD^nC^T)^T CD^nC^T)=tr\left(CD^nC^TCD^nC^T\right)=tr\left(CD^{2n}C^T\right)=$$
$$=tr\left(D^{2n}C^TC\right)=tr(D^{2n})=9^{2n}+1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left\|A^n\right\|}A^n=C\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left\|A^n\right\|}D^n\right)\cdot C^T=C\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left\|A^n\right\|}D^n\right)\cdot C^T=C\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(9^{2n}+1)^{1/2}}\begin{pmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\right)\cdot C^T=$$
$$=C\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot C^T=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 1. Задача 4. (10 баллов)

Функция $y(x)$ на отрезке $[0, 2]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+4y=0$, с граничными условиями: $y=0$, $y'=2$ при $x=0$. Найдите $y(2)$.

***Решение:* Вариант 1. Задача 4**

$\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y(x)=C_1\cdot\cos(2x)+C_2\cdot\sin(2x)$, $\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

Учитывая $y=0$, $y'=2$ при $x=0$, получаем $C_1=0$, $C_2=1$. Функция равна $y(x)=\sin(2x)$, соответственно, $y(2)=\sin(4)\approx 0.757$.

Вариант 2. Задача 4. (10 баллов)

Функция $y(x)$ на отрезке $[0, 3]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+3y'=0$, удовлетворяющее указанным условиям: $y=0$ при $x=0$ и $y'=-3$ при $x=3$. Найдите $y(3)$.

***Решение:* Вариант 1. Задача 4**

$\lambda^2+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y(x)=C_1+C_2\cdot e^{-3x}$, $\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

$0=y(0)=C_1+C_2\cdot e^{-3\cdot 0}\Rightarrow C_1+C_2=0$;

$-3=y'(3)=-3C_2\cdot e^{-3\cdot 3}\Rightarrow C_2=e^9$.

Функция равна $y(x)=e^9(-1+e^{-3x})$, ее значение при $x=3$ равно $y(3)=e^9(-1+e^{-3\cdot 3})=1-e^9\approx -8102$.

Вариант 1. Задача 5. (10 баллов)

Функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению $y''(t)-8y'(t)-9y(t)+7=0$, а функция $x(t)$ равна $x(t)=\frac{1}{4}(y'(t)-y(t)-1)$. Найдите функцию $y(t)$, такую, что $x(0)=x'(0)=0$.

***Решение:* Вариант 1. Задача 5**

$y(t)=\frac{7}{9}$ является частным решением неоднородного уравнения $y''(t)-8y'(t)-9y(t)+7=0$.

Найдем общее решение однородного уравнения $y''(t)-8y'(t)-9y(t)=0$.
Характеристическое уравнение $\lambda^2-8\lambda-9=0$ имеет корни $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=9$. Тогда общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{9t}+\frac{7}{9}$, соответственно,

$$x(t)=\frac{1}{4}(y'(t)-y(t)-1)=\frac{1}{4}\left(\left(c_1e^{-t}+c_2e^{9t}+\frac{7}{9}\right)'-\left(c_1e^{-t}+c_2e^{9t}+\frac{7}{9}\right)-1\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-c_1e^{-t}+9c_2e^{9t}-c_1e^{-t}-c_2e^{9t}-\frac{7}{9}-1\right)=\frac{1}{4}\left(-2c_1e^{-t}+8c_2e^{9t}-\frac{16}{9}\right)=\frac{1}{2}\left(-c_1e^{-t}+4c_2e^{9t}-\frac{8}{9}\right).$$

.Из граничных условий получаем $\begin{cases}2x(0)=-c_1+4c_2-\frac{8}{9}=0,\\ 2x'(0)=c_1+36c_2=0.\end{cases}$

Отсюда получаем $c_1=-\frac{4}{5},\ c_2=\frac{1}{45}$, и $y(t)=-\frac{4}{5}e^{-t}+\frac{1}{45}e^{9t}+\frac{7}{9}$.

Вариант 2. Задача 5. (10 баллов)
Функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению $y''(t)-8y'(t)+12y(t)+8=0$, а функция $x(t)$ равна $x(t)=\frac{1}{2}(y'(t)-4y(t)-2)$. Найдите функцию $y(t)$, такую, что $x(0)=x'(0)=0$.

***Решение:* Вариант 2. Задача 5**

$y(t)=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$ является частным решением неоднородного уравнения $y''(t)-8y'(t)+12y(t)+8=0$.

Найдем общее решение однородного уравнения $y''(t)-8y'(t)+12y(t)=0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2-8\lambda+12=0$ имеет корни $\lambda_1=2,\ \lambda_2=6$. Тогда общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{6t}-\frac{2}{3}$, соответственно,

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(\left(c_1e^{2t}+c_2e^{6t}-\frac{2}{3}\right)'-4\left(c_1e^{2t}+c_2e^{6t}-\frac{2}{3}\right)-2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2c_1e^{2t}+6c_2e^{6t}-4c_1e^{2t}-4c_2e^{6t}+\frac{8}{3}-2\right)=-c_1e^{2t}+c_2e^{6t}+\frac{1}{3}.$$

Из граничных условий получаем $\begin{cases}x(0)=-c_1+c_2+\frac{1}{3}=0,\\ x'(0)=-2c_1+6c_2=0.\end{cases}$

Отсюда получаем $c_1=\frac{1}{2},\ c_2=\frac{1}{6}$, и $y(t)=\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{6t}-\frac{2}{3}$.

Вариант 1. Задача 6. (10 баллов)
Два стрелка стреляют по мишени (каждый делает один выстрел). Для первого стрелка вероятность промаха составляет 0.3, для второго — 0.5. Результаты выстрелов независимы.
а) (5 баллов) Какова вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним из них?
б) (5 баллов) При выстреле двух стрелков мишень была поражена (хотя бы одним выстрелом). Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся?

Решение: **Вариант 1.** **Задача 6**

а) Обозначим события: A — «первый стрелок промахнулся», B — «второй стрелок промахнулся». Тогда событие «мишень поражена» можно записать как $C=\overline{A\cap B}$. Искомая вероятность: $P(C)=1-P(A\cap B)=1-P(A)\cdot P(B)=1-0.3\cdot 0.5=0.85$.

б) Здесь нужно найти условную вероятность события B при условии C. По определению условной вероятности, $P(B\,|\,C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(C)}$. Совместное наступление событий B и C (второй стрелок промахнулся, но мишень была поражена) эквивалентно тому, что событие A не произошло (первый стрелок поразил мишень). Таким образом, $P(B\,|\,C)=\dfrac{P(\overline{A})}{P(C)}=\dfrac{1-0.3}{0.85}=\dfrac{0.7}{0.85}=\dfrac{14}{17}\approx 0.8235$.

Вариант 2. **Задача 6. (10 баллов)**

На учениях два самолёта атакуют цель (каждый выпускает одну ракету). Известно, что первый самолёт поражает цель с вероятностью 0.6, а второй — с вероятностью 0.4. Пусть самолёты поражают цель независимо друг от друга.

а) (5 баллов) Какова вероятность того, что цель будет поражена только одним самолётом?

б) (5 баллов) При разборе учений выяснилось, что цель была поражена только одним самолётом. Какова вероятность того, что цель поразил первый самолёт?

Решение: **Вариант 2.** **Задача 6**

а) Обозначим события: A — «первый самолёт поразил цель», B — «второй самолёт поразил цель». Тогда событие «цель поражена только одним самолётом» можно записать как $C=(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$. В силу независимости событий A и B и несовместности событий $\overline{A}\cap B$ и $A\cap\overline{B}$ искомая вероятность равна:

$$P(C)=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=(1-0.6)\cdot 0.4+0.6\cdot(1-0.4)=0.16+0.36=0.52.$$

б) Здесь нужно найти условную вероятность события A при условии C. По определению условной вероятности $P(A\,|\,C)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}$. Событие $A\cap C$ («первый самолёт поразил цель, и цель была поражена только одним самолётом») эквивалентно событию $A\cap\overline{B}$ («первый самолёт поразил цель, а второй — нет»). Отсюда получаем:

$$P(A\,|\,C)=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(C)}=\frac{P(A)(1-P(B))}{P(C)}=\frac{0.6\cdot 0.6}{0.52}=\frac{0.36}{0.52}=\frac{9}{13}\approx 0.6923.$$

Вариант 1. **Задача 7. (5 баллов)**

Случайная величина X принимает значения в интервале $[0,\ 2]$, и на этом интервале ее функция распределения равна $F(x)=cx^3$, где c — некоторая константа.

а) (2 балла) Найдите $P(X<0.3\,|\,X<0.6)$.

б) (3 балла) Найдите $Cov\left(X+1,\dfrac{1}{X}\right)$.

Решение: **Вариант 1.** **Задача 7**

Сначала найдем c: $1=F(2)=c\cdot 2^3$, получаем $c=1/8$.

а) $P(X<0.3\,|\,X<0.6)=\dfrac{P(X<0.3\cap X<0.6)}{P(X<0.6)}=\dfrac{P(X<0.3)}{P(X<0.6)}=\dfrac{F(0.3)}{F(0.6)}=\left(\dfrac{0.3}{0.6}\right)^3=\dfrac{1}{8}=0.125$.

б) $f(x)=F'(x)=\frac{3}{8}x^2$. $EX=\int_0^2 x\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\frac{2^4}{4}=\frac{3}{2}=1.5$,

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\int_0^2 x^{-1}\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\frac{2^2}{2}=\frac{3}{4}=0.75.$$

$$Cov\left(X+1,\frac{1}{X}\right)=Cov\left(X,\frac{1}{X}\right)=E\left(X\cdot\frac{1}{X}\right)-(EX)E\left(\frac{1}{X}\right)=1-\frac{3}{2}\frac{3}{4}=1-\frac{9}{8}=-\frac{1}{8}=-0.125.$$

Вариант 2. Задача 7. (5 баллов)

Случайная величина X принимает значения в интервале $[0,\ 3]$, и на этом интервале ее функция распределения равна $F(x)=cx^2$, где c — некоторая константа.

а) (2 балла) Найдите $P(X>2\,|\,X>1)$.

б) (3 балла) Найдите $Cov\left(X^2+3,\frac{1}{X}\right)$.

***Решение:* Вариант 1. Задача 7**

Сначала найдем c: $1=F(3)=c\cdot 3^2$, получаем $c=1/9$.

а) $$P(X>2\,|\,X>1)=\frac{P(X>2\cap X>1)}{P(X>1)}=\frac{P(X>2)}{P(X>1)}=\frac{1-F(2)}{1-F(1)}=\frac{1-\frac{1}{9}\cdot 4}{1-\frac{1}{9}}=\frac{5}{8}=0.625.$$

б) $f(x)=F'(x)=\frac{2}{9}x$. $E(X^2)=\int_0^3 x^2\frac{2}{9}xdx=\frac{2}{9}\frac{3^4}{4}=\frac{9}{2}=4.5$, $E(X)=\int_0^3 x\frac{2}{9}xdx=\frac{2}{9}\frac{3^3}{3}=2$,

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\int_0^3 x^{-1}\frac{2}{9}xdx=3\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{3}\approx 0.667.$$

$$Cov\left(X^2+3,\frac{1}{X}\right)=Cov\left(X^2,\frac{1}{X}\right)=E\left(X^2\cdot\frac{1}{X}\right)-\left(E(X^2)\right)E\left(\frac{1}{X}\right)=2-\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}=-1.$$

Вариант 1. Задача 8. (10 баллов)

Имеется случайная выборка $X_1,\dots,X_n$, где все X_i независимы и принимают значения 1, 3 и 5 со следующими вероятностями:

x	1	3	5
$P(X_i=x)$	a	0.2	0.8–a

а) (5 баллов) Какие значения являются допустимыми для параметра a? Постройте оценку параметра a методом моментов. Обязательно ли эта оценка принадлежит области допустимых значений параметра a?

б) (5 баллов) При каком значении m оценка $\hat{a}=mX_1-1.15+\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}X_i$ параметра a будет несмещённой?

***Решение:* Вариант 1. Задача 8.**

а) Допустимое множество значения параметра a: $[0,\,0.8]$.

Найдём математическое ожидание величин X_i: $E(X_i)=1\cdot a+3\cdot 0.2+5\cdot(0.8-a)=4.6-4a$.

Приравняем его к выборочному среднему: $4.6-4a=\bar{X}$.

Решив полученное уравнение относительно a, получаем оценку метода моментов:

$$\hat{a}_{MM} = \frac{4.6 - \bar{X}}{4} = 1.15 - \frac{\bar{X}}{4}.$$

Эта оценка может не принадлежать области допустимых значений параметра a.

б) Найдём математическое ожидание предложенной оценки:

$$E(\hat{a}) = mE(X_1) - 1.15 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} E(X_i) = 4.6m - 4ma - 1.15 + \frac{1}{n-1}(n-1)(4.6 - 4a) =$$
$$= (4.6 - 4a)(m+1) - 1.15.$$

Оценка $\hat{a}$ будет несмещённой, если $E(\hat{a}) = a$, или $(4.6 - 4a)(m+1) - 1.15 = a$

Решив уравнение относительно m, получаем ответ: $m = -\frac{1}{4}$.

Вариант 2. Задача 8. (10 баллов)

Имеется случайная выборка $X_1, \ldots, X_n$, где все X_i независимы и принимают значения –1, 1 и 4 со следующими вероятностями:

x	-1	1	4
$P(X_i = x)$	0.3	a	$0.7 - a$

а) (5 баллов) Какие значения являются допустимыми для параметра a? Постройте оценку параметра a методом моментов. Обязательно ли эта оценка принадлежит области допустимых значений параметра a?

б) (5 баллов) При каком значении m оценка $\hat{a} = X_1 - \frac{5}{6} + \frac{m}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_i$ параметра a будет несмещённой?

Решение: **Вариант 2. Задача 8.**

а) Допустимое множество значения параметра a: $[0, 0.7]$.

Найдём математическое ожидание величин X_i: $E(X_i) = -1 \cdot 0.3 + 1 \cdot a + 4 \cdot (0.7 - a) = 2.5 - 3a$.

Приравняем его к выборочному среднему: $2.5 - 3a = \bar{X}$. Решив полученное уравнение относительно a, получаем оценку метода моментов:

$$\hat{a}_{MM} = \frac{2.5 - \bar{X}}{3}.$$

Эта оценка может не принадлежать области допустимых значений параметра a.

б) Найдём математическое ожидание предложенной оценки:

$$E(\hat{a}) = E(X_1) - \frac{5}{6} + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} E(X_i) = 2.5 - 3a - \frac{5}{6} + \frac{m}{n-1}(n-1)(2.5 - 3a) = (2.5 - 3a)(m+1) - \frac{5}{6}.$$

Оценка $\hat{a}$ будет несмещённой, если $E(\hat{a}) = a$, или $(2.5 - 3a)(m+1) - \frac{5}{6} = a$.

Решив уравнение относительно m, получаем ответ: $m = -\frac{4}{3}$.

Вариант 1. Задача 9. (10 баллов)

Страховая компания выплачивает агентам комиссию. План возмещения убытков предполагает, что средние выплаты комиссий составят 32 тысячи долларов за год. Если средние выплаты будут меньше запланированных, то план потребуется изменить. Для проверки гипотезы о том, что средние выплаты равны 32 тысячам долларов, против альтернативной гипотезы о том, что средние выплаты меньше 32 тысяч, была сформирована случайная выборка из 49 агентов. В этой выборке средние выплаты комиссий составили 29.5 тысяч долларов в год, а несмещённая оценка дисперсии оказалась равна 36. Для проверки гипотезы выбран уровень значимости, равный 5%.

а) (3 балла) Рассчитайте статистику, с помощью которой проверяется указанная гипотеза.

б) (2 балла) Рассчитайте критическое значение для этой статистики.

в) (2 балла) Выясните, даёт ли выборочное исследование основание для пересмотра плана возмещения убытков.

г) (3 балла) Определите, при каких уровнях значимости основная гипотеза будет отвергаться, а при каких нет.

Решение: **Вариант 1. Задача 9.**

а) Тестируем нулевую гипотезу $H_0: \mu = \mu_0$ против альтернативы $H_A: \mu < \mu_0$ в случае произвольной генеральной совокупности и большого объёма выборки. Для решения этой задачи воспользуемся статистикой: $z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\underset{asy}{\sim}} N(0,1)$.

(Можно также предположить, что генеральная совокупность нормальна, и использовать распределение Стьюдента.)

$$z = \frac{29.5 - 32}{\sqrt{36}/\sqrt{49}} = -\frac{5/2}{6/7} = -\frac{35}{12} = -2.917.$$

б) Если пользоваться нормальным распределением, то критическое значение $z_{crit} = -z_{0.05} = -1.645$.

(Для распределения Стьюдента: $t_{crit} = -t_{n-1,\alpha} = -t_{48,0.05} = -1.677$. Поскольку нужного числа степеней свободы в таблицах нет, но из них можно установить, что $t_{crit} \in (-1.684, -1.671)$).

в) Так как $z < z_{crit}$, ($z < t_{crit}$), то нулевая гипотеза отвергается, план возмещения убытков стоит пересмотреть.

г) При использовании нормального распределения: P-значение $= P(Z < -2.917) = 0.0018$. Таким образом, при уровне значимости выше 0.18% основная гипотеза будет отвергаться, а при уровне ниже 0.18% не будет. Если пользоваться распределением Стьюдента, то из таблиц можно установить, что P-значение $\in (0.001, 0.005)$.

Вариант 2 Задача 9. (10 баллов)

Фирма-производитель некоторого лекарственного препарата следит за тем, чтобы концентрация посторонних примесей в препарате в среднем составляла не более 0.03. Для проверки гипотезы о том, что средняя концентрация посторонних примесей равна 0.03, против альтернативной гипотезы о том, что эта концентрация больше 0.03, была взята случайная выборка из 64 образцов препарата. Средняя концентрация примесей в выборке составила 0.0327, а несмещённая оценка дисперсии составила 0.0009. Для проверки гипотезы выбран уровень значимости 10%.

а) (3 балла) Рассчитайте статистику, с помощью которой проверяется указанная гипотеза.

б) (2 балла) Рассчитайте критическое значение для этой статистики.

в) (2 балла) Выясните, даёт ли выборочное исследование основание считать, что средняя концентрация посторонних примесей превышает допустимый предел в 0.03?

г) (3 балла) Определите, при каких уровнях значимости основная гипотеза будет отвергаться, а при каких – нет.

Решение: **Вариант 2. Задача 9.**

а) Тестируем нулевую гипотезу $H_0: \mu = \mu_0$ против альтернативы $H_A: \mu > \mu_0$ в случае произвольной генеральной совокупности и большого объёма выборки. Для решения этой задачи воспользуемся статистикой: $z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}} \overset{H_0}{\underset{asy}{\sim}} N(0,1)$. (Можно также предположить, что генеральная совокупность нормальна, и использовать распределение Стьюдента.)

$$z = \frac{0.0327 - 0.03}{\sqrt{0.0009} / \sqrt{64}} = \frac{0.0027}{0.03/8} = 0.72.$$

б) Если пользоваться нормальным распределением, то критическое значение $z_{crit} = z_{0.1} = 1.28$. Для распределения Стьюдента: $t_{crit} = t_{n-1,\alpha} = t_{63,0.1} = 1.295$. Впрочем, нужного числа степеней свободы в таблицах нет, но из них можно установить, что $t_{crit} \in (1.289,\ 1.296)$.

в) Так как $z < z_{crit}$ ($z < t_{crit}$), то нет оснований отвергать основную гипотезу и считать, что допустимый предел концентрации превышен.

г) При использовании нормального распределения: P-значение$= P(Z > 0.72) = 0.2358$. Таким образом, при уровне значимости выше 23.58% основная гипотеза будет отвергаться, а при уровне ниже 23.58% не будет. Если пользоваться распределением Стьюдента, то из таблиц можно установить, что P-значение$\in (0.2,\ 0.25)$.

Вариант 1. Задача 10. (15 баллов)

На 20 наблюдениях методом МНК оценивается регрессионное уравнение $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 t_i + \varepsilon_i$ при условиях на ошибки, соответствующих стандартной модели множественной регрессии. Полученные вектор оценок коэффициентов и оценка его матрицы ковариаций равны:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 8.4739 \\ 20.8209 \\ 1.2309 \\ -17.4765 \end{bmatrix}, \quad \hat{V}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 54.94838 & -24.62334 & \text{-}30.31618 & -0.62822 \\ -24.62334 & 85.97937 & 8.523841 & -72.60611 \\ -30.31618 & 8.523841 & 19.45426 & 6.176577 \\ -0.628223 & -72.60611 & 6.176577 & 77.56094 \end{bmatrix},$$

а оценка дисперсии ошибок регрессии и коэффициент детерминации равны $s^2 = 117.0376$, $R^2 = 0.243649$.

Оценивание на тех же данных уравнения $y_i = \gamma_1 + \gamma_2 t_i + \varepsilon_i$ дало значение коэффициента детерминации равное $R^2 = 0.003539$.

а) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 0$ против альтернативы $H_1 : \beta_2 \neq 0$, а также тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_3 = 0$ против альтернативы $H_1 : \beta_3 \neq 0$

б) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ против альтернативы H_1: «не H_0».

в) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ против альтернативы $H_1 : \beta_2 > \beta_3$.

***Решение*. Вариант 1. Задача 10**

а) $t_{\hat{\beta}_2} = \dfrac{\hat{\beta}_2}{s_{\hat{\beta}_2}} = \dfrac{20.8209}{\sqrt{85.97937}} = 2.245$; $t_{\hat{\beta}_3} = \dfrac{\hat{\beta}_3}{s_{\hat{\beta}_3}} = \dfrac{1.2309}{\sqrt{19.45426}} = 0.279$; поскольку $|t_{\hat{\beta}_2}| > t_{0.25}(16) = 2.12$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = 0$ отвергается, соответственно, гипотеза $H_0 : \beta_3 = 0$ не отвергается.

б) $F = \dfrac{(R_{UR}^2 - R_R^2)/q}{(1 - R_{UR}^2)/(n-k)} = \dfrac{(0.243649 - 0.003539)/2}{(1 - 0.243649)/(16)} = 2.54 < F_{0.05}(2,16) = 3.63$, т.е. гипотеза $\beta_2 = \beta_3 = 0$ не отвергается.

в) Рассмотрим разность $\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3$; оценка ее дисперсии равна

$$\hat{V}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) = \hat{V}(\hat{\beta}_2) + \hat{V}(\hat{\beta}_3) - 2\widehat{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 85.97937 + 19.45424 - 2\cdot 8.523841 = 88.38595,$$

критическая статистика $t = \dfrac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)}}$ при нулевой гипотезе имеет распределение $t(16)$.

Поскольку $t_{0.05}(16) = 1.746$, а $t = 2.08 > 1.746$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ отвергается в пользу альтернативы $H_1 : \beta_2 > \beta_3$.

Вариант 2. Задача 10. (15 баллов)

На 20 наблюдениях методом МНК оценивается регрессионное уравнение $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 t_i + \varepsilon_i$ при условиях на ошибки, сответствующих стандартной модели множественной регрессии. Полученные вектор оценок коэффициентов и оценка его матрицы ковариаций равны:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 9.979620 \\ -0.493709 \\ 0.281451 \\ 2.955317 \end{bmatrix}, \quad \hat{V}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 0.264234 & 0.009178 & -0.116760 & -0.264416 \\ 0.009178 & 0.077753 & 0.014406 & -0.114635 \\ -0.116760 & 0.014406 & 0.061492 & 0.098570 \\ -0.264416 & -0.114635 & 0.098570 & 0.436001 \end{bmatrix},$$

а оценка дисперсии ошибок регрессии и коэффициент детерминации равны $s^2 = 0.49367627$, $R^2 = 0.832389$.

Оценивание на тех же данных уравнения $y_i = \gamma_1 + \gamma_2 t_i + \varepsilon_i$ дало значение коэффициента детерминации равное $R^2 = 0.786790$.

а) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = 0$ против альтернативы $H_1 : \beta_2 \neq 0$, а также тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_3 = 0$ против альтернативы $H_1 : \beta_3 \neq 0$

б) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ против альтернативы H_1: «не H_0».

в) (5 баллов) На 5%-ном уровне значимости тестируйте гипотезу $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ против альтернативы $H_1 : \beta_2 < \beta_3$.

***Решение*. Вариант 2. Задача 10**

а) $t_{\hat{\beta}_2} = \dfrac{\hat{\beta}_2}{s_{\hat{\beta}_2}} = \dfrac{-0.49371}{\sqrt{0.077753}} = -1.77$; $t_{\hat{\beta}_3} = \dfrac{\hat{\beta}_3}{s_{\hat{\beta}_3}} = \dfrac{0.281451}{\sqrt{0.061492}} = 1.13$; поскольку

$|t_{\hat{\beta}_2}| < t_{0.25}(20) = 2.086$, и $|t_{\hat{\beta}_3}| < t_{0.25}(20) = 2.086$ то гипотеза $H_0 : \beta_2 = 0$ не отвергается, соответственно, гипотеза $H_0 : \beta_3 = 0$ так же не отвергается.

б) $F = \dfrac{(R^2_{UR} - R^2_R)/q}{(1 - R^2_{UR})/(n-k)} = \dfrac{(0.832389 - 0.786790)/2}{(1 - 0.832389)/(20)} = 2.72 < F_{0.05}(2,20) = 3.49$, т.е. гипотеза $\beta_2 = \beta_3 = 0$ не отвергается.

в) Рассмотрим разность $\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3$ оценка ее дисперсии равна

$$\hat{V}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) = \hat{V}(\hat{\beta}_2) + \hat{V}(\hat{\beta}_3) - 2\widehat{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 0.077753 + 0.061492 - 2\cdot 0.014406 = 0.110433,$$

критическая статистика $t = \dfrac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)}}$ при нулевой гипотезе имеет распределение $t(20)$. Поскольку $t_{0.05}(20) = 1.725$, а $t = -0.775 > -1.725$, то гипотеза $H_0 : \beta_2 = \beta_3$ не отвергается в пользу альтернативы $H_1 : \beta_2 > \beta_3$.