

9 класс

Задание № 1 (25 баллов)

Балда и Поп

Поп нанял работника Балду молоть зерно в муку. Из одного мешка зерна получается одна мера¹ муки. Балда согласен размолоть первый мешок за 3 рубля; за второй мешок он просит на 10 копеек больше, за третий мешок еще на 10 копеек больше и т. д. Мешок зерна стоит на рынке 5 рублей, готовая мера муки — 10 рублей. Бюджет Попа составляет 479 рублей. *Какое максимальное количество мер муки сможет заготовить поп?*

Решение:

Первый вариант (через предельные величины)

Предположим, поп купит на рынке x мешков зерна и отдаст их Балде для того, чтобы размолоть в муку. Мера муки, полученная из x -го по счету мешка зерна, обойдется попу в сумму, равную: $5 + 3 + 0,1 \cdot (x - 1) = 8 + 0,1 \cdot (x - 1)$.

Число x поп выберет с таким расчетом, чтобы последняя мера муки, полученная от Балды, стоила попу столько же, сколько и готовая мера муки, которую можно купить на рынке, т.е. $8 + 0,1 \cdot (x - 1) = 10$.

(15 баллов)

$x = 21$, то есть 21-я мера стоит одинаково вне зависимости от способа ее получения, то есть можно дать Балде 20 или 21 меру.

Для того чтобы перемолоть 21 мешок муки, поп заплатит Балде сумму, равную:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 21 + 0,1 + 0,2 + 0,3 + \dots + 0,1 \cdot (x - 1) &= 3 \cdot 21 + 0,1 + 0,2 + 0,3 + \dots + 0,1 \cdot 20 = \\ &= 3 \cdot 21 + \frac{0,1 + 0,1 \cdot 20}{2} \cdot 20 = 84. \end{aligned}$$

Или: если поп попросит Балду перемолоть 20 мешков, то заплатит ему сумму, равную

$$3 \cdot 20 + 0,1 + 0,2 + 0,3 + \dots + 0,1 \cdot 19 = 3 \cdot 20 + \frac{0,1 + 0,1 \cdot 20}{2} \cdot 20 = 79. \quad \text{(5 баллов)}$$

Кроме того, поп потратит на зерно, которое отдаст молоть Балде, $5 \cdot 21 = 105$ рублей (для случая, когда Балда мелет 21 мешок) или $20 \cdot 5 = 100$ рублей (если Балда мелет 20 мешков).

Таким образом, 21 мера муки, полученная из зерна, будет стоить попу: $84 + 105 = 189$ рублей (или 20 мер будут стоить $79 + 100 = 179$ рублей).

За вычетом этой суммы у него остается еще: $479 - 189 = 290$ рублей или $479 - 179 = 300$ рублей.

На эти деньги поп может еще приобрести 29 готовых мер муки или 30 мер муки.

Итого поп заготовит: $21 + 29 = 20 + 30 = 50$ мер муки. **(5 баллов)**

Второй вариант (через общие величины)

Пусть x мер готовит Балда, y мер закупается на рынке. Тогда Балда стремится максимизировать $x + y$ при условии наличия 479 рублей. Посчитаем затраты на меры, которые готовит Балда:

$$C_{\text{Balda}}(x) = 5x + (3 + (3 + 0,1) + \dots + (3 + 0,1 \cdot (x - 1))) = 8x + 0,1 \cdot (1 + 2 + \dots + x - 1) = 8x + \frac{(x - 1) \cdot x}{20} = \frac{x^2}{20} + 7,95x$$

Добавляя затраты на купленные мешки, получаем $\frac{x^2}{20} + 7,95x + 10y = 479$, откуда

¹Мера - русская народная единица емкости для сыпучих тел, соответствовавшая приблизительно 1 пуду зерна

$$y = 47,9 - x^2 / 200 - 0,795x.$$

Поп стремится максимизировать $C = x + y = 47,9 - x^2 / 200 - 0,795x + x = 47,9 - x^2 / 200 + 0,205x$. Это квадратичная парабола с ветвями вверх, вершина достигается при $x = 20,5$. Эта точка, однако, не подходит из-за нарушения целочисленности. В силу того, что найденный локальный максимум единственен, наилучшая из допустимых точек находится по соседству с ним. Можно посчитать значение функции в точках $x = 20$ и $x = 21$, но проще заметить, что поскольку парабола симметрична, а точки 20 и 21 находятся на одинаковом расстоянии от точки 20,5, выполнено $C(20) = C(21)$. Далее аналогично первому способу находим y и общее количество заготовленных мер.

Ответ: 50 мер.

Критерии оценивания:

Ошибка в расчетах при условии, что ход решения был полностью верный, **снималось 2 балла**.

Если при решении рассчитывалось только количество мешков, которое может перемолоть Балда, при условии, что поп потратит весь свой бюджет, **ставилось 15 баллов за все решение**.

При решении не использовался тот факт, что стоимость перемола зерна у Балды возрастала с ростом количества перемолотых им мешков, **то ставилось 10 баллов за все решение**.

Задание № 2 (25 баллов) Ремонт или экономика?

Аристарх Ксенофонович собрался сделать ремонт в ванной комнате, где нужно выполнить два вида работ: уложить пол площадью 6 м^2 новой плиткой и покрыть стены общей площадью $x \text{ м}^2$ пластиковыми панелями. Он размышляет, стоит ли ему делать ремонт самому, или лучше обратиться к услугам фирмы. Аристарх Ксенофонович имеет возможность преподавать экономику и зарабатывать таким образом 1 000 рублей в час. Ремонт и преподавание приносят ему одинаковое удовольствие. На укладку 1 м^2 плитки на полу у Аристарха Ксенофоновича уйдет 7 часов, а на поклейку 1 м^2 стен пластиковыми панелями — 5 часов. Стоимость плитки на строительном рынке — p рублей за 1 м^2 , а стоимость пластиковых панелей — 700 рублей за 1 м^2 . Прейскурант фирмы таков: 6 000 рублей берется за выезд на квартиру независимо от набора выполняемых услуг, покрытие 1 м^2 пола плиткой стоит 7 000 рублей, а покрытие 1 м^2 стен панелями стоит 6 000 рублей (расходные материалы в эту стоимость включены — фирма сама их покупает). Аристарх Ксенофонович хочет отремонтировать и пол, и стены. Если Аристарх Ксенофонович захочет, то он может сделать сам один (любой), или оба вида работ, или ни одного. Какое решение он примет в зависимости от параметров x и p ?

Решение:

Посчитаем издержки Аристарха в случае каждой из четырех альтернатив. (16 баллов=4х4)

	Кто что ремонтирует	Издержки – подробно	Издержки - сумма	
1	А.К. сам и пол, и стены	$6p + 42000 + 700x + 5000x$	$42000 + 5700x + 6p$	(4 балла)
2	А.К.– пол, фирма - стены	$6000 + 42000 + 6000x$	$48000 + 6000x + 6p$	(4 балла)
3	А.К.– стены, фирма - пол	$6000 + 42000 + 700x + 5000x$	$48000 + 5700x$	(4 балла)
4	фирма и пол, и стены	$6000 + 42000 + 6000x$	$48000 + 6000x$	(4 балла)

Из таблицы видно, что Аристарх Ксенофонович никогда **НЕ** будет выбирать **вторую или четвертую альтернативы**, поскольку **они заведомо хуже третьей (а вторая – еще и точно хуже первой)**. (5 баллов)

Остается сравнить первую и третью. Сравнивая 1-ю и 3-ю альтернативы, можно заметить, что величина $5700x$ на решение не оказывает влияния, поэтому x может быть любым. (2 балла)

Решая неравенство $42000 + 5700x + 6p < 48000 + 5700x$, получаем, что **первая** альтернатива выгоднее при $p < 1000$, а **третья** – при $p > 1000$. При $p = 1000$ обе альтернативы эквивалентны.

(2 балла)

Ответ:

x может принимать любые значения;

если $p < 1000$, то Аристарх Ксенофонович все будет делать сам;

если $p > 1000$, то Аристарх Ксенофонович сам отремонтирует стены, а на ремонт пола наймет фирму;

если $p = 1000$, то обе вышеупомянутые альтернативы эквивалентны.

Примечания к критериям оценивания.

В ходе проведения проверки выяснилось, что значительное количество участников олимпиады проводили сравнение не полноценных вариантов, а, например, ограничивались следующими парами:

	Кто что ремонтирует	Издержки – подробно	Издержки - сумма	
1	А.К. сам пол	$6p + 42000$	$42000 + 6p$	
2	фирма - пол	$6000 + 42000$	48000	

	Кто что ремонтирует	Издержки – подробно	Издержки - сумма	
1	А.К.сам стены	$700x + 5000x$	$5700x$	
2	фирма - стены	$6000 + 6000x$	$6000 + 6000x$	

Из чего даже получали похожий на правильный ответ. Однако такое решение не может считаться правильным, хотя бы по той причине, что расходы на вызов фирмы посчитаны и в первом и во втором варианте выбора, чего на самом деле не происходит. Поэтому данный вариант оценивался в **(10 баллов)**.

Часто это дополнялось рассмотрением еще одной пары

	Кто что ремонтирует	Издержки – подробно	Издержки - сумма	
1	А.К.сам и пол, и стены	$6p + 42000 + 700x + 5000x$	$42000 + 5700x + 6p$	
4	фирма и пол, и стены	$6000 + 42000 + 6000x$	$48000 + 6000x$	

Причем, что интересно, приводящим к самостоятельным ограничениям на значения X и P , никак не связанным с предыдущими двумя пунктами решения. Комбинация этих трех попарных сравнений оценивалась в **(12 баллов)**.

Подобный подход к решению, тем не менее, мог приводить и к полному количеству баллов, если участник, начиная с анализа пары

	Кто что ремонтирует	Издержки – подробно	Издержки - сумма	
1	А.К.сам стены	$700x + 5000x$	$5700x$	
2	фирма - стены	$6000 + 6000x$	$6000\alpha + 6000x$	

доказывал, что при любом значении X выгоднее делать ремонт стен самостоятельно, независимо от того, вызывали ли мы уже фирму на ремонт пола ($\alpha = 0$) или нет ($\alpha = 1$), или условно считаем, что издержки вызова распределяются в некой пропорции между ремонтом стен и пола фирмой ($0 < \alpha < 1$). Затем, уже учитывая доказанный факт ремонта стен своими силами, явно указывал, что издержки вызова сказываются только при рассмотрении пары

	Кто что ремонтирует	Издержки – подробно	Издержки - сумма	
1	А.К. сам пол	$6p + 42000$	$42000 + 6p$	
2	фирма - пол	$6000 + 42000$	48000	

с получением полноценного ответа.

В целом ряде случаев решения, приводимые участниками, выглядели как некий компромисс между неполным и полным вариантами решения. В каждом случае жюри определяло итоговый балл исходя из полноты и доказательности тех выводов, к которым приходил участник. Поэтому участники, получившие итоговый балл в диапазоне **(10 <балл<25)** либо написали в работе не все выводы, к которым приходили по ходу решения, либо привели не все расчеты, либо пропустили часть цепочки доказательств.

Задание № 3 (25 баллов) Подарок правнукам

Общеизвестно, что в случае начисления сложных процентов (метод, при котором проценты начисляются не только на первоначальную сумму вклада, но и на проценты, начисленные в предыдущих периодах) при большом сроке вклада можно получить очень большой доход. Так, если положить 1 рубль под 8 % годовых, то через 100 лет на счете будет почти 2 200 рублей — выигрыш составит 219 876 %! *Почему, зная этот факт, люди не открывают вклад с какой-нибудь маленькой суммой, например, 1 000 рублей, чтобы через 100 лет их внуки или правнуки стали миллионерами?*

Решение:

1) Деньги на банковском счете прибавляют в покупательной способности благодаря начисляемым процентам, но теряют из-за инфляции. В действительности имеет значение **реальная ставка процента, а не номинальная**. Так, если инфляция на протяжении этих 100 лет будет в среднем такая же, как номинальная процентная ставка, то через 100 лет на сумму вклада можно будет купить столько же товаров и услуг, сколько и сегодня; а если инфляция будет больше ставки процента, то даже меньше товаров и услуг. В любом случае, реальная доходность точно составит значительно меньше, чем та, которую можно рассчитать с помощью номинальных показателей.

2) Люди ценят благосостояние будущих поколений меньше, чем свое: они могут предпочесть потребить X товаров и услуг сегодня тому варианту, когда они сегодня не потребляют ничего, а через 100 лет их потомки (с которыми они даже не будут знакомы) потребляют 2200X товаров и услуг.

3) Люди принимают во внимание неопределенность: нет гарантии, что через 100 лет банк еще будет существовать, что инфляция не будет огромной, что у их детей и внуков родятся более дальние потомки, о благосостоянии которых стоит заботиться.

4) Люди тратят деньги альтернативными способами, которые также не исключают заботу о потомстве: например, если хорошо кормить детей и давать им образование (тратить на это деньги вместо того, чтобы класть их в банк), то больше будет шансов, что у них родятся здоровые дети, которые, в свою очередь, будут хорошо кормить и обучать своих детей и т. д.

Критерий оценивания:

Полный балл (**25 баллов**) выставляется, если в ответе сформулировано **больше двух корректных причин** и **приведены объяснения**, которые дают представления о понимании проблемы. Основной ответ - непредвиденная высокая инфляция, при которой реальные доходы будут отрицательными (максимально за одну причину 10 баллов).

- Непредвиденная инфляция, при которой реальные доходы будут нулевыми или сократятся. Итого **15 баллов**.

Далее по 5 баллов за любую из причин, но не более **10 баллов**.

- низкая значимость полезности отдаленных поколений перед нынешним в отличие от непосредственных детей
- неопределенность: мало ли, банк обанкротится или будет ядерная война.
- альтернативные способы вложения денег: акции, золото, образование.

Задание № 4 (25 баллов)

Путь из варяг в греки²



Одним из самых известных древних торговых маршрутов был путь «из варяг в греки». Благодаря ему, скандинавские племена могли торговать с Византией. Длина этого пути составляла не одну тысячу километров, так что издержки на преодоление такой дистанции были очень велики. Таким образом, племена торговали с далекой страной, а не с непосредственными соседями, что существенно образом уменьшало бы транспортные издержки и увеличивало бы разнообразие возможных товаров для сбыта. *В чем могла заключаться экономическая целесообразность такой торговли?*

Решение:

Многие страны различаются своими сравнительными преимуществами. Это различие обусловлено географическими, климатическими, историческими, политическими, экономическими и другими особенностями. Если торговля возможна, то каждая страна предпочтет специализироваться на том из товаров, в производстве которого она обладает сравнительными преимуществами, и обменивать этот товар на товары, производство которых дается этой стране тяжелее. Такая торговля будет выгодна обоим партнерам. Например, варяги везли в Византию железо и товары рыболовной отрасли, а из Византии перевозили на север продукты сельского хозяйства. Купцы, привозя свой товар в страну, где он отсутствует, получают возможность продавать товар по высокой рыночной цене. В некоторых случаях купцы фактически становились монополистами на рынке привезенного ими редкого товара. Наоборот, закупив в другой стране редкий для своей страны товар, купцы получают возможность, вернувшись, продавать его по очень высокой цене. В результате этого путешествия купцы могут получить прибыль, большую, чем в случае продажи того же самого товара на домашнем рынке или при торговле с соседними странами.

Соседние страны часто имеют одинаковый климат, одинаковые природные ресурсы. Следовательно, соседние страны часто специализируются на производстве одних и тех же товаров. Но тогда торговля друг с другом не принесет им большой выгоды. Именно поэтому скандинавские племена могли предпочитать торговать не с соседними племенами, а с Византией, у которой были сравнительные преимущества в производстве иных товаров.

Представим, что некоторая страна А выбирает, с какой из двух других стран торговать. Если бы возможные торговые партнеры различались только расстоянием до страны А, то тогда было бы выгодно торговать с той из стран, расстояние до которой меньше. Это будет как снижать расходы, связанные с транспортировкой товаров, так и увеличивать спектр возможных товаров для торговли (при перевозке на дальние расстояния товар может портиться). Таким образом, при прочих равных более выгодно торговать с географически близкими партнерами. Однако в случае торговли варягов и Византии получаемая купцами прибыль была настолько велика, что, несмотря на большие транспортные издержки, торговать с Византией варягам оказывалось выгоднее, чем с непосредственными соседями. Другими словами, для варягов

$$TR_{\text{Византия}} - TC_{\text{Византия}} > TR_{\text{Соседи}} - TC_{\text{Соседи}}$$

²Рисунок – «Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия», <http://www.megabook.ru/Article.asp?AID=665632>

Критерии проверки:

Фактическая схема проверки:

- 1) Объяснение того, в чем состоит экономическая выгода от торговли. **(10 баллов)**
- 2) Указание причины, побуждающей торговать не с соседними, а с дальними странами. **(10 баллов)**
- 3) Указание на то, почему рост транспортных издержек может быть не существенен при принятии решения о торговле с дальними странами. **(5 баллов)**

Кроме того, положительно оценивалось **(5 баллов)** указание любого из указанных ниже поводов торговли, если отсутствовали в решении пункты 1, 2, 3 из схемы проверки:

- уникальность торгуемых товаров
- монополизм,
- расширение рынков сбыта,
- возможность импортировать технологии