10.1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b, такие, что $a^2 + 2b^2$ делится на $a + 2b$.

Ответ $(1, 1)$ и $(4, 1)$

20 баллов за все ответы с полным обоснованием (см. решение ниже), из которого следует, что других решений нет.

15: ответы с полным обоснованием, но с арифметическими ошибками, не изменяющими ход решения (например, из-за вычислительной ошибки изменился один из ответов).

10: все ответы с обоснованием, в котором имеются изолированные пробелы (например, некоторое несложное по сравнению с задачей утверждение явно сформулировано, но оставлено без доказательства).

5: существенный пробел в обосновании.

1: приведенные в изложении обоснования утверждения не позволяют полностью восстановить ход рассуждений или потерян ответ.

Заметим, что $a^2 - 4b^2 = (a + 2b)(a - 2b)$ делится на $a + 2b$, поэтому $6b^2 = (a^2 + 2b^2) - (a^2 - 4b^2)$ и $3a^2 = 2(a^2 + 2b^2) + (a^2 - 4b^2)$ делится на $a + 2b$. Значит, если бы $a + 2b$ делилось на простое число p, отличное от 2 и 3, то $6b^2$ и $3a^2$ делились бы на число p, взаимно простое с 3 и 6, значит a и b тоже делились бы на это число, что противоречило бы их взаимной простоте. Также, если бы $a + 2b$ делилось на 3^2, то $6b^2$ и $3a^2$ делились бы на 3^2, поэтому $2b^2$ и a^2 делились бы на 3, и a и b тоже делились бы на3, что противоречило бы их взаимной простоте. Аналогично, если бы $a + 2b$ делилось на 2^2, то a и b делились бы 2, что противоречило бы их взаимной простоте.

Таким образом, $a + 2b$ не делится ни на какие простые числа, кроме 2 и 3, а ткаже не делится на 2^2 и 3^2, поэтому $a + 2b$ равно 1, 2, 3 или 6. Уравнение $a + 2b = 6$ имеет единственное решение, состоящее из взаимно простых натуральных чисел $a = 4$, $b = 1$, и оно является решением задачи, так как в этом случае $a^2 + 2b^2 = 18 \vdots 6$. Аналогично, уравнение $a + 2b = 3$ дает ответ $a = b = 1$, а уравнения $a + 2b = 2$ и $a + 2b = 1$ не имеют натуральных решений.

10.2. На плоскости отметили 9 точек. Из каждой из них выпустили три луча, образующие друг с другом тупые углы и не проходящие через другие точки. На какое минимальное число частей получившиеся 27 лучей могут разбить плоскость?

20 баллов за пример с 33 частями и полное обоснование того, что меньше не бывает.

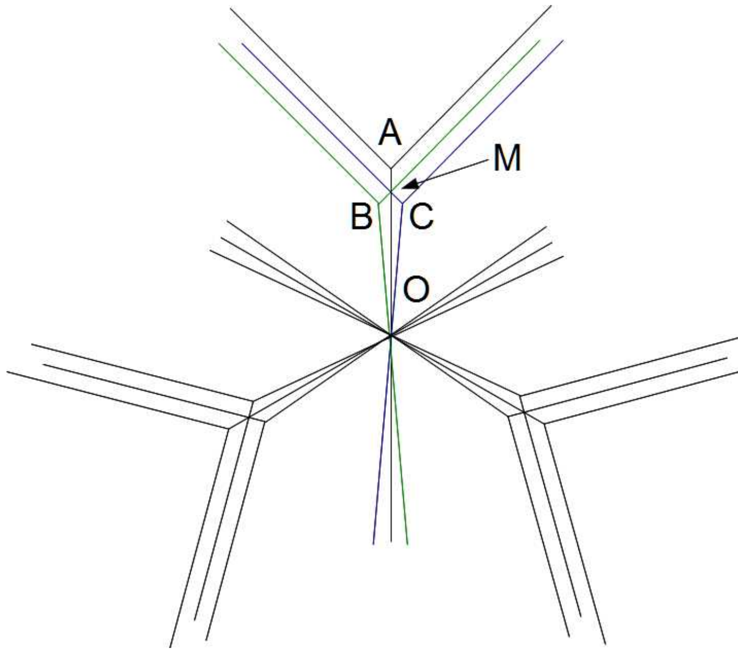
18: то же в предположении, что никакие три луча не пересекаются в одной точке.

15: пример с неполным обоснованием того, что меньше не былвает.

10: описание примера в предположении, что никакие три луча не пересекаются в одной точке, или без него, с аккуратным подсчетом частей.

5: описание примера в предположении, что никакие три луча не пересекаются в одной точке, или без него, без аккуратного подсчета частей.

Ответ: 33



Докажем, что девять троек лучей разбивают плоскость не меньше, чем на 33 части. Скажем, что данные тройки лучей образуют k-кратное пересечение в данной точке, если через эту точку проходит ровно $k+1$ луч из $k+1$ разных троек (например, на рисунке есть три двукратных пересечения и одно восьмикратное).

Докажем, что число частей, на которые девять троек разбивают плоскость, на 19 больше суммарной кратности образованных ими пересечений. Для этого выберем систему координат, в которой никакой из лучей не параллелен оси абсцисс, а все концы и точки пересечений лучей имеют разную ординату, и будем называть ординату точки ее высотой. В каждой из частей, на которые лучи делят плоскость, отметим углы, вершины которых являются самой верхней и самой нижней точкой части. В каждой ограниченной части окажется отмечено два угла. В каждой неогранченной части, содержащей горизонтальный луч (таких частей две), не будет отмечено ни одного угла. В каждой из остальных неограниченных частей (таких $27-2=25$) будет отмечен один угол. Таким образом, (число отмеченных углов) $= 2\cdot$ (число частей) $-\,29$.

Каждая k-кратная точка пересечения является самой верхней для k частей, на которые лучи делят плоскость, и самой нижней для k частей. Каждое начало тройки лучей является самой верхней или самой нижней точкой для одной из частей. Поэтому (число отмеченных углов) $= 2\cdot$ (сумма кратностей) $+\,9$. Сравнивая эту формулу с предыдущей, получаем, что число частей на 19 больше суммарной кратности пересечений. Осталось доказать, что суммарная кратность пересечений не меньше 14.

Для этого докажем, что *любые две тройки лучей пересекаются хотя бы по одной точке.* Обозначим начала лучей троек через A и B, а их лучи в порядке обхода этих точек по часовой стрелке от отрезка AB через AA_1, AA_2, AA_3 и BB_1, BB_2, BB_3 соответственно. Если AA_1 и BB_3 не пересекаются, то $\angle BAA_1 + \angle ABB_3 \geqslant 180^\circ$, и если AA_3 и BB_1 не пересекаются, то $\angle BAA_3 + \angle ABB_1 \geqslant 180^\circ$. Поэтому, если бы тройки не пересекались, то $\angle A_1AA_2 + \angle A_3AA_2 + \angle B_1BB_2 + \angle B_3BB_2 = 2\cdot 360^\circ - \angle BAA_1 - \angle ABB_3 - \angle BAA_3 - \angle ABB_1 \leqslant 360^\circ$, поэтому один из углов $\angle A_1AA_2$, $\angle A_3AA_2$, $\angle B_1BB_2$, $\angle B_3BB_2$ был бы не более, чем прямым, что противоречило бы условию. Аналогичным образом доказывается, что, если три тройки лучей имеют одну двукратную точку пересечения и не имеют однократных, то четвертая тройка лучей пересекается с их объединением хотя бы в двух точках.

Теперь можно доказать, что суммарная кратность пересечений девяти троек лучей не меньше 14.

Случай 1: существуют три тройки лучей, имеющие одну двукратную точку пересечения и не имеющие однократных. Тогда добавление к этим трем тройкам каждой из оставшихся шести увеличивает суммарную кратность пересечений хотя бы на два, поэтому суммарная кратность пересечения всех девяти троек не меньше $2 + 6 \cdot 2 = 14$.

Случай 2: любые две из девяти троек лучей пересекаются более чем в одной точке. В этом случае, добавление к первой тройке лучей каждой из восьми остальных увеличивает суммарную кратность хотя бы на два, поэтому суммарная кратность пересечения всех девяти троек не меньше $8 \cdot 2 = 16$.

Случай 3: ни один из первых двух случаев не имеет места. Выберем две тройки, пересекающиеся по одной точке. Каждая из остальных троек пересекает их объединение хотя бы в двух точках, иначе бы имел место случай 1. Поэтому добавление к этим двум тройкам каждой из оставшихся семи увеличивает суммарную кратность пересечений хотя бы на два, поэтому суммарная кратность пересечения всех девяти троек не меньше $1+7\cdot 2 = 15$.

Итак, суммарная кратность пересечений, образованных девятью тройками лучей, не меньше 14, поэтому число частей, на которые они разбивают плоскость, не меньше $14 + 19 = 33$. Построим пример, когда частей ровно 33. Проведем из конца A отрезка OA два луча, образующие с отрезком угол $130°$, и проведем через точку M на отрезке OA параллельные им лучи, выбрав их концы B и C таким образом, чтобы углы BOA и COA были равны $5°$. Также проведем из точек A, B и C лучи через точку O. Получим три тройки лучей, образующие два двукратных пересечения. Повернув эти три тройки на $120°$ и $240°$ относительно точки O, получим искомую конфигурацию (см. рисунок).

Многие решали эту задачу в (неверном) предположении, что никакие три луча не пересекаются в одной точке. В этом предположении ответ 55 и решение следующее. Пронумеруем тройки лучей, и для каждого числа k от 2 до 9 обозначим через b_k число точек пересечения тройки лучей номер k с тройками меньших номеров. Эти точки разбивают тройку номер k на $b_k + 1$ кусок, из которых один – назовем его центральным – содержит начала всех трех лучей, а каждый из остальных кусков является отрезком одного из лучей. Заметим, что, если тройки с номерами меньше k разбивали плоскость на N частей, то центральный кусок тройки номер k разбивает одну из этих частей на три части, а каждый из остальных b_k кусков тройки номер k разбивает одну из частей на две, поэтому тройки с номерами до k включительно разбивают плоскость на $N + b_k + 2$ частей. Применяя это рассуждение при всех k от 2 до 9, получаем, что все девять троек разбивают плоскость на $3 + b_2 + 2 + b_3 + 2 + \ldots + b_9 + 2 = 19 + b_2 + b_3 + \ldots + b_9$ частей. Но $b_2 \geqslant 1$, $b_3 \geqslant 2, \ldots, b_9 \geqslant 8$, поэтому $19 + b_2 + b_3 + \ldots + b_9 \geqslant 55$. *Эта оценка достигается,* если, например, все тройки лучей получаются из одной и той же тройки параллельными переносами.

10.3. Сколько точек, обе координаты которых натуральны, лежит строго внутри области, ограниченной осями координат и графиком функции

$$-x^3 + 30\,x^2 - 300{,}6\,x + 2012?$$

Ответ:19103

20 баллов за верный ответ с полным обоснованием.

10: содержательное решение (с использованием, например, соображений симметрии), приведшее к неверному ответу в результате арифметической ошибки.

5: прямой подсчет, приведший к неверному ответу в результате арифметической ошибки, либо неверное понимание условия задачи: подсчет точек на графике, а не под графиком, с полным обоснованием и правильным ответом.

Заметим, что центром симметрии графика функции $y = -x^3 + 30\,x^2 - 300{,}6\,x + 2012$ является точка с координатами $(10, 1006)$, так как заменой координат $x_1 = x - 10$, $y_1 = y - 1006$ функция приводится к нечетной $y_1 = -x_1^3 - \frac{3}{5}x_1$. Координаты точки, симметричной точке $(0, 2012)$ пересечения графика с вертикальной осью, находятся из уравнений $(x + 0)/2 = 10$ и $(y + 2012)/2 = 1006$ и равны $(20, 0)$, в частности, симметричная точка лежит на горизонтальной оси. Поэтому описанная в условии область вместе с областью, центрально ей симметричной относительно точки $(10, 1006)$, образует прямоугольник с вершинами $(0, 0)$, $(20, 0)$, $(0, 2012)$, $(20, 2012)$.

Строго внутри этого прямоугольника лежат $2011 \cdot 19 = 38209$ точек с целыми координатами, из них три – с абсциссами 5, 10 и 15 – лежат на графике (других точек с целыми координатами на графике нет, так как, если x не делится на 5, то число $-x^3 + 30\,x^2 - 300{,}6\,x + 2012$ не целое). Из остальных 38206 точек под графиком лежит половина.

10.4. Каждая из четырех окружностей касается трех сторон заданного параллелограмма с отношением сторон $2 : 3$ и площадью 1. Найдите площадь четырехугольника, образованного центрами этих окружностей.

Ответ: 1/12

20 баллов за правильный ответ с полностью обоснованным решением.

15: то же, что **20**, при наличии неточности в обосновании или арифметической ошибки, не влияющей на ход решения.

10: то же, что **20**, при наличии неточности в обосновании и арифметической ошибки, не влияющей на ход решения.

5: решение с существенными пробелами в обосновании.

Так как центры окружностей лежат на биссектрисах соответствующих углов параллелограмма, нужно найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами. Обозначив стороны параллелограмма через $2x$ и $3x$, а углы, образованные биссектрисами со сторонами – через α и β, заметим, что углы искомого четырехугольника равны $180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$ (то есть четырехугольник являестя прямоугольником). Поэтому сторона этого прямоугольника равна расстоянию между биссектрисами противоположных углов параллелограмма. Это расстояние равно разности расстояний от биссектрис до вершины параллелограмма, то есть $3x\sin(\alpha) - 2x\sin(\alpha) = x\sin(\alpha)$. Аналогично, другая сторона прямоугольника равна $x\sin(\beta) = x\sin(90^\circ - \alpha) = x\cos(\alpha)$. Поэтому площадь прямоугольника равна $x^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{(2x)\cdot(3x)\cdot\sin(2\alpha)}{12}$. Так как числитель этой дроби – площадь параллелограмма, площадь прямоугольника равна 1/12.

10.5. Докажите, что все положительные корни многочлена $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-2$ больше $\frac{1}{14}$.

20 баллов за обоснование монотонности и верную оценку значения в точке 1/14.

15: то же, что **20**, с арифметической ошибкой, не изменяющей ход вычислений, или с утверждением о монотонности без его аккуратного обоснования.

10: доказательство без арифметических ошибок, неявно ссылающееся на монотонность, без ее аккуратного обоснования.

5: доказательство с недочетом, отличным от перечисленных выше (например, не сформулировано утверждение о монотонности).

1: неполное доказательство.

Заметим, что функция $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-2$ монотонно возрастает при положительных x: если $0 < x_1 < x_2$, то, перемножая неравенства $x_1 + k < x_2 + k$ по всем k от 0 до 4, получим $x_1(x_1+1)(x_1+2)(x_1+3)(x_1+4)-2 < x_2(x_2+1)(x_2+2)(x_2+3)(x_2+4)-2$. Поэтому при положительном $x < \frac{1}{14}$ получим $f(x) < f(\frac{1}{14}) = \frac{(14+1)\cdot(2\cdot 14+1)\cdot(3\cdot 14+1)\cdot(4\cdot 14+1)}{14^5} - 2 = \frac{1\cdot 14^5+13\cdot 14^4+10\cdot 14^3+7\cdot 14^2+10\cdot 14+1}{14^5} - 2 = -9463/537824 < 0$, поэтому никакое положительное число $x < \frac{1}{14}$ не является корнем f.

10.6. Существует ли набор выпуклых четырехугольников, который является набором всех граней как двух выпуклых многогранников, так и одного?

Ответ: Да. Например, 12 ромбов с диагоналями 1 и $\sqrt{2}$

20 баллов за верный пример с объяснением, почему он удовлетворяет условию задачи и доказательством его существования.

15: верный пример (описание конструкции) с объяснением, почему он удовлетворяет условию задачи, без доказательства его существования.

10: верный пример (только рисунок) с объяснением, почему он удовлетворяет условию задачи, без доказательства его существования.

Докажем, что указанный в ответе набор четырехугольников подходит (мы не утверждаем, что это единственный подходящий набор, более того, можно легко найти другие). Очевидно, из указанных в ответе ромбов можно сложить два параллелепипеда. Построим один многогоранник, имеющий тот же набор граней. Для этого построим на каждой из граней единичного куба правильную четырехгранную пирамиду с высотой 1/2. Так как пирамида правильная, то высоты, опущенные из обоих концов ее высоты на сторону основания, разобьют эту сторону пополам. Поэтому три упомянутые высоты образуют треугольник. Треугольник прямоугольный, и оба его катета равны 1/2, поэтому его гипотенуза равна $\sqrt{2}/2$, а острый угол равен 45°. Поэтому боковые грани двух пирамид, примыкающие к одному и тому же ребру куба, образуют угол $90° + 45° + 45° = 180°$, то есть лежат в одной плоскости. Два равнобедренных треугольника с общим основанием длины 1 и высотами $\sqrt{2}/2$, лежащие в одной плоскости, образуют ромб с диагоналями 1 и $\sqrt{2}$, поэтому гранями объединения куба и пристроенных к нему пирамид будут 12 таких ромбов (по числу ребер куба).