11.1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b, такие, что $2a^2+3b^2$ делится на $2a+3b$.

Ответ $(1,1)$, $(6,1)$, $(3,8)$ и $(9,4)$

20 баллов за все ответы с полным обоснованием (см. решение ниже), из которого следует, что других решений нет.

15: ответы с полным обоснованием, но с арифметическими ошибками, не изменяющими ход решения (например, из-за вычислительной ошибки изменился один из ответов).

10: все ответы с обоснованием, в котором имеются изолированные пробелы (например, некоторое несложное по сравнению с задачей утверждение явно сформулировано, но оставлено без доказательства).

5: существенный пробел в обосновании или потеря одного из ответов.

2: приведенные в изложении обоснования утверждения не позволяют полностью восстановить ход рассуждений или потеряно более одного ответа.

Заметим, что $4a^2-9b^2=(2a+3b)(2a-3b)$ делится на $2a+3b$, поэтому $15b^2=2(2a^2+3b^2)-(4a^2-9b^2)$ и $10a^2=3(2a^2+3b^2)+(4a^2-9b^2)$ делится на $2a+3b$. Значит, если бы $2a+3b$ делилось на простое число p, отличное от 2, 3 и 5, то $15b^2$ и $10a^2$ делились бы на p, взаимно простое с 10 и 15, поэтому a и b также делились бы p, что противоречило бы их взаимной простоте. Если бы $2a+3b$ делилось на 5^2, то $15b^2$ и $10a^2$ делились бы на 5^2, поэтому $3b^2$ и $2a^2$ делились бы на 5, это число взаимно просто с каждым из чисел 2 и 3, поэтому a и b также делились бы 5, что противоречило бы взаимной простоте a и b. Аналогично, если бы $2a+3b$ делилось на 2^2 или 3^2, то a и b делились бы на 2 или 3 соответственно, что также противоречило бы их взаимной простоте. Значит $2a+3b$ не делится ни накакое простое число, кроме 2, 3 и 5, а также не делится на 2^2, 3^2 и 5^2. Поэтому оно равно 2, 3, 5, или произведению некоторых из этих трех простых чисел, то есть 6, 10, 15 или 30.

При $2a+3b=30$, как доказано выше, $15b^2 \vdots 30$ и $10a^2 \vdots 30$, поэтому $b^2 \vdots 2$ и $a^2 \vdots 3$, значит $b \vdots 2$ и $a \vdots 3$. Поэтому $a=3k$ и $b=2m$, где k не делится на 2, а m – на 3 (иначе a и b не взаимно просты), и $2a+3b=6(k+m)=30$, то есть $k+m=5$. Отсюда $k=1, m=4$ или $k=3, m=2$, то есть $a=3, b=8$ или $a=9, b=4$. Оба варианта дают решение задачи, так как в обоих случаях $2a^2+3b^2=210 \vdots 30$.

Аналогично, при $2a+3b=15$ получаем $a \vdots 3$. Поэтому $a=3k$, где k не делится на 2, а b – на 3 (иначе a и b не взаимно просты), и $2a+3b=3(2k+b)=15$, то есть $2k+b=5$. Отсюда $k=2, b=1, a=6$, и это решение задачи, так как в этом случае $2a^2+3b^2=75 \vdots 15$.

Никакое из уравнений $2a+3b=10$, $2a+3b=6$, $2a+3b=3$, $2a+3b=2$ не имеет взаимно простых натуральных решений, а уравнение $2a+3b=5$ дает решение $a=b=1$.

Другой вариант решения. Заметим, что $2a^2+5ab+3b^2=(2a+3b)(a+b)$ делится на $2a+3b$, поэтому $2a^2+3b^2$ делится на $2a+3b$ тогда и только тогда, когда $5ab$ делится на $2a+3b$. Наибольший общий делитель a и $2a+3b$ равен наибольшему общему делителю a и $3b$; поскольку a и b взаимно просты, этот наибольший общий делитель может быть равен либо 1, либо 3. Аналогично, наибольший общий делитель b и $2a+3b$ равен 1 или 2.

Рассмотрим следующие варианты. Если a не делится на 3 и b не делится на 2, то 5 делится на $2a+3b$, откуда $a=b=1$. Если $a=3m$ и b не делится на 2, то $5*3=15$ делится на $2a+3b=6m+3b$, то есть 5 делится на $2m+b$ (где m и b натуральные), откуда $b=1$,

$m = 2$ и $a = 6$ ($b = 3$, $m = 1$ и $a = 3$ противоречит требованию взаимной простоты a и b). Если $b = 2n$ и a не делится на 3, то $5 * 2 = 10$ делится на $2a + 3b = 2a + 6n$, то есть 5 делится на $a + 3n$, откуда $a = 2$, $n = 1$ и $b = 2$, что противоречит требованию взаимной простоты a и b, так что этот вариант отпадает.

Наконец, если $a = 3m$ и $b = 2n$, то $5 * 3 * 2 = 30$ делится на $2a + 3b = 6m + 6n$, то есть 5 делится на $m + n$. Этому условию удовлетворяют пары натуральных чисел $(m, n) = (1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ и $(4, 1)$, которым соответствуют пары $(a, b) = (3, 8)$, $(6, 6)$, $(9, 4)$, и $(12, 2)$. Ввиду требования взаимной простоты a и b, условиям задачи удовлетворяют только первая и третья из этих четырех пар (плюс еще две пары, найденные выше).

11.2. Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость графики 10 квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Ответ: 101

20 баллов за полное доказательство того, что больше 101 части не бывает и пример со 101 частью с полным обоснованием.

18: то же, что **20**, но с арифметической ошибкой, не влияющей на ход рассуждений.

14: то же, что **20**, с другими несущественными недочетами (без неверных утверждений и пробелах в рассуждении)

10: полное доказательство того, что больше 101 части не бывает, или пример со 101 частью с полным обоснованием.

5: то же, что **10**, с несущественными недочетами (без неверных утверждений и пробелах в рассуждении)

2: верный ответ с обоснованием, недостаточным для установления ни максимальности, ни достижимости.

Пронумеруем параболы, и для каждого числа k от 2 до 10 обозначим через b_k число точек пересечения параболы номер k с параболами меньших номеров. Эти точки разбивают параболу номер k на $b_k + 1$ кусок. Заметим, что, если параболы с номерами меньше k разбивали плоскость на N частей, то каждый из $b_k + 1$ кусков параболы номер k разбивает одну из этих частей на две, поэтому параболы с номерами до k включительно разбивают плоскость на $N + b_k + 1$ частей. Применяя это рассуждение при всех k от 2 до 10, получаем, что все десять парабол разбивают плоскость на $11 + b_2 + \ldots + b_{10}$ частей.

Так как квадратичное уравнение имеет не более двух решений, две параболы пересекаются не более, чем в двух точках, поэтому $b_2 \leqslant 2$, $b_3 \leqslant 4$, $b_4 \leqslant 6, \ldots, b_{10} \leqslant 18$, поэтому $11 + b_2 + \ldots + b_{10} \leqslant 101$. Это оценка достигается, если каждые две из десяти парабол пересекаются в двух точках, и ни в какой точке не пересекаются три.

Покажем, что такое возможно: выберем 10 негоризонтальных прямых, таких что никакие три не проходят через одну точку, и любые две пересекаются в точке с положительной абсциссой. Пусть $y = a_1x + c_1, \ldots, y = a_{10}x + c_{10}$ – уравнения этих прямых, тогда никакие три из этих уравнений не имеют общего решения, и любые два имеют одно общее решение, в котором x положительно. Значит, никакие три из уравнений $y = a_1x^2 + c_1, \ldots, y = a_{10}x^2 + c_{10}$ также не имеют общего решения, и любые два из них имеют два общих решения (а именно, если уравнения $y = a_kx + c_k$ и $y = a_mx + c_m$ имели общее решение $x = u > 0$, $y = v$, то уравнения $y = a_kx^2 + c_k$ и $y = a_mx^2 + c_m$ имеют два общих решения $x = \pm\sqrt{u}$, $y = v$). Поэтому среди парабол, заданных уравнениями

$y = a_1x^2 + c_1, \ldots, y = a_{10}x^2 + c_{10}$, никакие три не пересекаются в одной точке, и любые две пересекаются в двух точках, поэтому они разбивают плоскость на 101 часть.

11.3. При каком значении параметра a график многочлена $x^4-6x^3+12x^2+ax$ симметричен относительно прямой $x = c$ для какого-нибудь значения константы c?

Ответ: $a = -9$

20 баллов за доказательство, что $x = 3/2$ – ось симметрии при $a = -9$, и что при других значениях осей нет.

15 доказано, что если ось симметрии $x = c$ существует, то $c = 3/2$ и $a = -9$. Не проверено, что при $a = -9$ прямая $x = 3/2$ в самом деле будет осью симметрии.

10 то же, что **15**, но невнимание к проверке ответов привело к получению лишнего решения (например, $a = 0$).

5 правильно найдено c, но a не найдено, или найдено выражение a через c, но c не найдено.

Сделав замену переменной $t = x - c$, получим

$$x^4-6x^3+12x^2+ax = t^4+(4c-6)t^3+(6c^2-18c+12)t^2+(4c^3-18c^2+24c+a)t+(c^4-6c^3+12c^2+ac).$$

График функции $t^4 + (4c - 6)t^3 + (6c^2 - 18c + 12)t^2 + (4c^3 - 18c^2 + 24c + a)t + (c^4 - 6c^3 + 12c^2 + ac)$ симметричен относительно вертикальной координатной прямой если и только если функция четная. Многочлен четный, если и только если его коэффициенты при x в нечетных степенях равны нулю: $4c - 6 = 4c^3 - 18c^2 + 24c + a = 0$. Решая эту систему уравнений, находим $c = 3/2$ и $a = -9$.

11.4. В пространстве выбраны четыре точки, все координаты каждой из которых делятся на 3, причем эти точки не лежат в одной плоскости. Какое минимальное число точек, все координаты которых четны, может содержаться в тетраэдре, вершинами которого являются выбранные четыре точки? (Содержаться – значит лежать внутри, на грани, на ребре или в вершине.)

Ответ: 1

20 баллов за полное доказательство того, что в каждом тетраэдре есть хотя бы одна искомая точка, и пример тетраэдра, в котором такая точка ровно одна, с его полным обоснованием.

19: изолированные пробелы в доказательстве того, что в каждом тетраэдре есть хотя бы одна искомая точка, и пример тетраэдра, в котором такая точка ровно одна, с его полным обоснованием.

14: полное доказательство того, что в каждом тетраэдре есть хотя бы одна искомая точка, или пример тетраэдра, в котором такая точка ровно одна, с его полным обоснованием.

10: пример тетраэдра, в котором искомая точка ровно одна, с неполным обоснованием.

5: правильный пример тетраэдра с неверным подсчетом количества точек с четными координатами в нем.

Докажем, что ровно одна точка с четными координатами может содержаться в требуемом тетраэдре: например, что $(4, 4, 4)$ – единственная точка с четными координатами в тетраэдре с координатами вершин $(3, 3, 3)$, $(6, 3, 3)$, $(3, 6, 3)$ и $(3, 3, 6)$. Так как каждому из уравнений $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$, $x + y + z = 12$ удовлетворяют три из четырех вершин тетраэдра, то эти уравнения описывают плоскости граней тетраэдра. Поэтому точка с координатами (x, y, z) содержится в этом тетраэдре, если и только если выполняются неравенства $x \geqslant 3$, $y \geqslant 3$, $z \geqslant 3$ и $x + y + z \leqslant 12$. Если при этом x, y или z равно 3, то не все координаты (x, y, z) четны. Если же x, y и z не равны 3, но целочисленны, то выполняются неравенства $x \geqslant 4$, $y \geqslant 4$, $z \geqslant 4$, которые вместе с неравенством $x+y+z \leqslant 12$ имеют единственное общее решение $x = y = z = 4$.

Докажем теперь, что меньше одной точки с четными координатами не бывает. Вычислим координаты середины отрезка с концами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2):

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}, \tag{$*$}$$

а также координаты точки, делящей этот отрезок в отношении $2 : 1$:

$$\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}, \frac{z_1 + 2z_2}{3}. \tag{$**$}$$

Вычислим координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3): она делит в отношении $2 : 1$ медиану, поэтому можем вычислить координаты основания медианы по формуле $(*)$ и затем координаты точки пересечения медиан по формуле $(**)$:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}. \tag{$***$}$$

Нам также понадобятся два следующих наблюдения.

1. Точка, симметричная точке с целочисленными (четными) координатами относительно точки с целочисленными координатами, также имеет целочисленные (четные) координаты. Действительно, если координаты центра симметрии, исходной и симметричной точек равны (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно, то по формуле $(*)$ получим $x_2 = 2x_0 - x_1$, $y_2 = 2y_0 - y_1$, $z_2 = 2z_0 - z_1$.

2. Если у параллелепипеда центры граней имеют целочисленные координаты, то такой параллелепипед содержит точку с четными координатами. Действительно, предположим, что это не так, и для каждой грани параллелепипеда рассмотрим параллельные ей плоскости, отстоящие от нее на расстояния, кратные расстоянию до противоположной грани. Эти плоскости разбивают пространство на параллелепипеды, равные исходному. Докажем, что в каждом из этих параллелепипедов центры граней имеют целочисленные координаты, и не содержится точек с четными координатами:

шаг 1 – для исходного параллелепипеда это верно по предположению;

шаг 2 – для параллелепипедов, имеющих общую грань с исходным, это верно согласно наблюдению 1, так как их центры граней и целочисленные точки симметричны центрам граней и целочисленным точкам исходного параллелепипеда относительно его центров граней;

шаг 3 – для параллелепипедов, имеющих общую грань с одним из рассмотренных на шаге 2, это верно согласно наблюдению 1 аналогичным образом; и т.д.

Таким образом, получили противоречие: ни в одном из параллелепипедов, покрывающих все пространство, нет точки с четными координатами.

Теперь докажем, что в тетраэдре $ABCD$, координаты вершин которого делятся на 3, содержится не менее одной точки с четными координатами. Заметим, что точки A', B', C', D' пересечения медиан граней BCD, ACD, ABD, ABC имеют целые координаты по формуле $(***)$. Рассмотрим параллелепипед, образованный плоскостями ACD, ABD, ABC, а также симметричными им относительно точки D'. Заметим, что точки A', B', C' являются центрами симметрии его граней: действительно, точка A' делит медиану из точки B в том же отношении $2:1$, что и точка B' – медиану из точки A, поэтому отрезки AB и $A'B'$ параллельны, поэтому точка B' лежит на пересечении грани параллелепипеда и прямой, проходячей через его центр параллельно его ребру, поэтому B' – цент его грани; рассуждения для C' и D' аналогичны.

Таким образом, согласно замечанию 2, построенный параллелепипед содержит точку E с четными координатами. Если E содержится в $ABCD$, то все доказано, иначе точка, симметричная E относительно A', содержится в $ABCD$ и также имеет четные координаты согласно наблюдению 1.

11.5. Описанный четырёхугольник $ABCD$ делится диагональю AC на два подобных, но не равных треугольника. Чему может быть равна длина диагонали AC, если длины сторон AB и CD равны 5 и 10, соответственно?

Ответ: $5\sqrt{2}$ или 6

Эта задача имеет очень несложное **геометрическое решение** (см. ниже) однако очень многие школьники предпочитали формально выписывать все возможные получающиеся системы уравнений и затем их решать (см. **аналитическое решение**). При этом получалось намного больше посторонних решений, которые соответствуют четырехугольнику, вырождающемуся в отрезок. Эти решение необходимо было потом отбрасывать, чего многие школьники не заметили.

16 баллов за полное решение

12: ставится в случае, когда потерян (или неверно разобран) ТОЛЬКО ОДИН случай (см. приведенное ниже полное решение), независимо от того, привела ошибка к изменению списка ответов, или нет. Т.е. в аналитическом решении при этом могут получиться два верных ответа и один лишний при правильном отсечении всех остальных случаев, или ошибочно будет приведен только один ответ, а второй правильный ответ потерян, но при этом все остальные случаи разобраны верно, или же, список ответов окажется верным, а какой-то из случаев, кроме первого, тем не менее, не рассмотрен. В геометрическом решении это значит, что либо найдены два верных ответа, но не разобрана конфигурация, соответствующая случаям 1 и 2, либо эта конфигурация наоборот, разобрана, а один из верных ответов при этом потерян.

8: ставится в случае, когда потеряны (или неверно разобраны) НЕ БОЛЕЕ ДВУХ случаев аналитического решения, или в геометрическом решении разобрано БОЛЕЕ одного случая (из трех), но на +/- решение не тянет (есть заметные недочеты).

6: ставится, если в аналитическом решении неверно разобрано БОЛЕЕ ДВУХ случаев, или если в геометрическом решении разобран ТОЛЬКО ОДИН случай, приводящий к правильному ответу и не разобраны случаи 1 и 2

4: ставится, если приведен без исследования какой-нибудь один угаданный ответ (такие случаи были) Сюда же, конечно, относятся все трудноперечислимые случаи, когда что-то положительное явно сделано, но ни на один более высокий знак решение не тянет.

4: школьник неправильно понял условия задачи, но при этом в измененнной формулировке решение правильное.

Аналитическое решение. Обозначим искомую диагональ через d, она разбивает четырехугольник на два треугольника: один со сторонами 5 и x, другой со сторонами 10 и $15-x$. Всего пропорцию для двух подобных треугольников можно написать 6 способами: $x/a = 5/b = d/c$, где вместо чисел a, b и c надо брать все возможные перестановки чисел d, 10 и $15-x$.

1) Случай $x/(15-x) = 5/10 = d/d$ сразу отметается, потому что там возникает равенство $1/2 = 1$.

2) Случай $x/10 = 5/(15-x) = d/d$ приводит к $x = 10$, что дает равные треугольники и произвольную диагональ от 5 до 15, и если решать совсем бездумно, еще и посторонний корень $x = 5$.

3) Случай $x/(15-x) = 5/d = d/10$. Самый частый в ответах, потому что для нахождения ответа $d = 5\sqrt{2}$ не надо даже пользоваться тем, что в четырехугольник вписана окружность. На самом деле здесь, конечно, еще требуется доказательство того, что такие треугольники существуют, т.е. что выполнено неравенство треугольника — это небольшая возня с корнями. В этом случае $x = 15\sqrt{2} - 15$, стороны упорядочены $d > x > 5$ и неравенство треугольника, действительно, выполнено.

4) Случай $x/d = 5/10 = d/(15-x)$. Тогда $d = 6$, $x = 3$. Существование очевидно.

5) Случай $x/d = 5/(15-x) = d/10$. Для d получается кубическое уравнение $d^3 - 150d + 500 = 0$, а для x кубическое уравнение $x^3 - 30x^2 + 225x - 250 = 0$. Эти уравнения имеют по одному целому корню $d = 10$, $x = 10$, эти корни соответствуют равным треугольникам. После деления получаются квадратные уравнения $d^2 + 10d - 50 = 0$ и $x^2 - 20x + 25 = 0$. Решая, получаем одно значение для диагонали $d = -5 + 5\sqrt{3}$ (второе — отрицательное) и ДВА значения для стороны $x = 10 - 5\sqrt{3}$ и $x = 10 + 5\sqrt{3}$. В первом случае треугольник вырождается в отрезок, а второе значение $x > 15$, поэтому оно соответствует отрицательному значению d.

6) Случай $x/10 = 5/d = d/(15-x)$. Для d получается кубическое уравнение $d^3 - 75d + 250 = 0$, а для x кубическое уравнение $x^3 - 150x^2 + 500 = 0$. Эти уравнения имеют по одному целому корню $d = 5$, $x = 10$, эти корни соответствуют равным вырожденным в отрезок треугольникам. После деления получаются квадратные уравнения $d^2 + 5d - 50 = 0$ и $x^2 - 5x - 50$, которые снова дают посторонние корни $d = 5$ и $x = 10$.

Геометрическое решение.

Если диагональ в каждом из двух подобных треугольников оказывается соответственной парой сторон, то коэффициент подобия равен 1 и треугольники равны — этим отметаются случаи 1 и 2 аналитического решения.

Если стороны, соответствующие в подобных треугольниках диагонали оказываются смежными (и, тем самым, смежными с этой диагональю), то эта диагональ оказывается биссектрисой, что в описанном четырехугольнике означает, что центр вписанной окружности лежит на диагонали. Тогда эти два треугольника очевидно оказываются равными. Это случаи 5 и 6 аналитического решения — здесь геометрия дает наибольший выигрыш.

Если стороны, соответствующие в подобных треугольниках диагонали оказываются, наоборот, противоположными, то они должны образовывать с диагональю равные углы, и, следовательно, быть параллельными, так что эти две стороны являются основаниями трапеции. Далее, эта пара сторон может оказаться либо парой сторон 5 и 10, либо 5 и 10 это остальные две стороны, что и дает 3 в первом случае и $5\sqrt{2}$ во втором. (Это случаи 3 и 4 аналитического решения.) Конечно, и в геометрическом решении необходимо проверять выполнение неравенство треугольника.

11.6. В одной из вершин правильного $2n$-угольника, $n \geq 2$, поставлено число 1. Для данной расстановки чисел $2, 3, \ldots, 2n$ в остальные вершины $2n$-угольника поставим на каждой его стороне знак $+$, если число на конце стороны (при движении по часовой стрелке) больше числа на ее начале и знак $-$, если оно меньше. Докажите, что модуль разности между числом расстановок чисел $2, 3, \ldots, 2n$ с четным количеством плюсов на сторонах и числом расстановок с нечетным количеством плюсов равен числу расстановок, в которых плюсы и минусы чередуются при **(а)** $n = 3$, **(б)** $n = 4$, **(в)** произвольном n.

5 баллов за полное решение пункта (а).

4: решение пункта (а) с недочетами.

3: правильно подсчитаны два из трех количеств в пункте (а).

2: правильно подсчитано одно из трех количеств в пункте (а).

1: То же, что **3**, но с арифметическими ошибками.

7 баллов за полное решение пункта (б).

12 баллов за полное решение пункта (в).

Выберем произвольные целые числа $q \geqslant 0$ и $m \geqslant 2$. Для каждого способа g расставить числа $1, \ldots, m$ на окружности, обозначим через $|g|$ разность числа плюсов и числа минусов, соответствующих g как описано в условии задачи. Пусть k_q^m – число расстановок на окружности чисел $1, ..., m$, в которых ровно q чисел соседствуют как с плюсом, так и с минусом. Заметим, что числа k_q^m удовлетворяют следующему соотношению (назовем его равенством $(*_q^m)$):

$$k_q^m = qk_{q+1}^{m-1} + (m - q + 1)k_{q-1}^{m-1}.$$

Действительно, каждая расстановка на окружности чисел $1, \ldots, m$, в которой ровно q чисел соседствуют как с плюсом, так и с минусом, при удалении числа m превращается в расстановку чисел $1, \ldots, m - 1$, в которой ровно $q + 1$ или $q - 1$ число соседствует как с плюсом, так и с минусом, причем каждая из таких расстановок чисел $1, \ldots, m - 1$ при добавлении к ней числа m всевозможными способами дает ровно q или $m-q+1$ требуемых расстановок чисел $1, \ldots, m$ соответственно.

Для любого целого числа $p \geqslant 0$ обозначим через a_q^p сумму

$$\frac{(-1)^{[\frac{q}{2}]}}{2^q}\Big(C_q^0 q^p - C_q^1(q-2)^p + C_q^2(q-4)^p - C_q^3(q-6)^p + \ldots (-1)^q C_q^q(-q)^p\Big).$$

Мы докажем следующее равенство (назовем его равенством $(**_m^p)$): сумма чисел $(-1)^{[\frac{|g|}{2}]}|g|^p$ по всем способам g расставить числа $1, \ldots, m$ на окружности равна $a_0^p k_m^m + a_1^p k_{m-1}^m + a_2^p k_{m-2}^m + \ldots$. Заметим, что при $m = 2n$ и $p = 0$ это равенство дает требуемое в задаче утверждение.

Равенство $(**_2^p)$ очевидно для любого p, поэтому нам достаточно для произвольных p и m вывести равенство $(**_m^p)$ из равенств $(**_{m-1}^0)$, $(**_{m-1}^1)$, $(**_{m-1}^2), \ldots$. Для этого рассмотрим произвольный способ h расставить числа $1, \ldots, m - 1$ на окружности и обозначим через h_+ и h_- число плюсов и минусов, соответствующих h как описано в условии задачи. Заметим, что при добавлении m к расстановке h всевозможными способами мы получим ровно h_+ расстановок g, таких что $|g| = |h| - 1$, и ровно h_- расстановок g, таких что $|g| = |h| + 1$. Поэтому сумма чисел $(-1)^{[\frac{|g|}{2}]}|g|^p$ по всем расстановкам g, полученных из h добавлением m, равна $h_+(-1)^{[\frac{|h|-1}{2}]}(|h|-1)^p + h_-(-1)^{[\frac{|h|+1}{2}]}(|h|+1)^p$, или, раскрывая скобки,

$$(-1)^{p-1}(-1)^{[\frac{|h|}{2}]}(C_p^0|h|^{p+1} - C_p^1(m-1)|h|^{p-1} + C_p^2|h|^{p-1} - C_p^3(m-1)|h|^{p-3} + C_p^4|h|^{p-3} - \ldots).$$

Суммируя эти равенства по всем расстановкам h и заменяя в получившемся равенстве сумму чисел $(-1)^{[\frac{|h|}{2}]}|h|^{p'}$ согласно равенству $(**_{m-1}^{p'})$ для каждого целого числа p', получим выражение левой части равенства $(**_m^p)$ в терминах чисел k_0^{m-1}, k_1^{m-1}, $k_2^{m-1}, \ldots$. Заменяя в правой части равенства $(**_m^p)$ числа k_0^m, k_1^m, $k_2^m, \ldots$ согласно равенствам $(*_0^m)$, $(*_1^m)$, $(*_2^m), \ldots$, получим выражение правой части равенства $(**_m^p)$ в терминах чисел k_0^{m-1}, k_1^{m-1}, $k_2^{m-1}, \ldots$. Приведя подобные в полученных выражениях для левой и правой частей равенства $(**_m^p)$, получим, что каждое из чисел k_0^{m-1}, k_1^{m-1}, $k_2^{m-1}, \ldots$ входит в каждое из двух выражений с одним и тем же коэффициентом.