

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**

**Перечень и содержание тем олимпиады  
по математике  
для учащихся 10 классов**

**Москва 2011**

# 10 КЛАСС

## Тема 1. Элементарные функции и графики.

### 01. Элементарные функции

Декартова прямоугольная система координат.

Понятие функции. Область определения, множество значений, график.

Четные и нечетные функции.

Периодические функции. Наименьший положительный период.

Монотонные функции. Локальный экстремум.

Преобразование графиков. Сдвиг, растяжение, зеркальная симметрия, центральная симметрия.

Линейная функция, прямая. Уравнение прямой в различных формах. Угловой коэффициент прямой.

Условия параллельности двух прямых на плоскости.

Условия перпендикулярности двух прямых на плоскости.

Квадратный трехчлен, парабола. Выделение полного квадрата.

Промежуток возрастания, промежуток убывания, точка экстремума.

Множество значений квадратного трехчлена.

Дробно-линейная функция, гипербола.

Асимптоты и оси симметрии гиперболы.

### 02. Элементарные функции с модулем

Преобразование модуля, примененное к аргументу.

Преобразование модуля, примененное к функции.

Композиция линейной функции и модуля.

Композиция квадратного трехчлена и модуля.

Композиция дробно-линейной функции и модуля.

### 03. Точки, прямые, многоугольники на плоскости

Множества на плоскости. Параллельный перенос, растяжение.

Зеркальная и центральная симметрия. Преобразование подобия.

Свойства симметрии фигур, описываемых уравнениями и неравенствами с одним и несколькими модулями.

Расстояние от точки до начала координат. Расстояние между двумя точками. Расстояние от прямой до начала координат. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми.

Фигуры на плоскости, определяемые уравнениями и неравенствами, включающими  $|x|$  и  $|y|$  в различных комбинациях.

### 04. Окружности на плоскости

Уравнение окружности.

Уравнение окружности со смещенным центром.

Уравнение окружности с модулями.

## Тема 2. Алгебраические уравнения.

### 05. Линейные и квадратные уравнения

Линейные уравнения без параметра и с параметром.

Квадратные уравнения. Условие разрешимости, условие единственного решения, условие неразрешимости.

Различные формулы для корней квадратного уравнения.

Теоремы Виета.

Вычисление коэффициентов квадратного уравнения с заданными корнями.

Вычисление симметрических функций от корней через коэффициенты.

Квадратные уравнения с параметром.

Уравнения, приводящиеся к квадратным с помощью замены переменной.

Методы решения дробно-рациональных уравнений.

## **06. Алгебраические уравнения старших степеней**

Метод понижения порядка алгебраических уравнений.

Биквадратные уравнения.

Симметрические уравнения.

Методы разложения на множители для уравнений старших степеней.

Уравнения, содержащие знак абсолютной величины.

## **Алгебраические неравенства.**

### **07. Свойства алгебраических неравенств**

Числовые неравенства. равносильные преобразования неравенств.

Линейные неравенства.

Квадратные неравенства.

Дробно-линейные неравенства.

Неравенства, содержащие модуль и несколько модулей.

Тождественные неравенства.

Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел. Свойства суммы двух взаимно обратных чисел.

### **08. Метод интервалов**

Метод интервалов для многочлена.

Метод интервалов для рациональной функции.

Метод интервалов для иррациональной функции.

## **Тема 3. Системы алгебраических уравнений.**

### **09. Системы линейных уравнений**

Понятие равносильных систем, понятие следствия.

Системы линейных алгебраических уравнений, имеющие единственное решение. Графический метод. Метод исключения неизвестных. Метод алгебраических преобразований.

Вычисление линейной функции от решения линейной системы методом алгебраических преобразований.

Простые текстовые задачи, приводящие к линейным системам.

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, не имеющие решений или имеющие бесконечное множество решений. Геометрическая интерпретация.

Линейные системы с параметром. Условие единственного решения, отсутствия решений, бесконечного числа решений.

Системы, приводящиеся к линейным с помощью замены переменной.

### **10. Системы уравнений общего вида**

Виетовские системы. Метод решения, условие разрешимости.

Системы, содержащие однородные уравнения.

Симметрические системы.

Метод замены переменных для решения систем.

## **Тема 4. Алгебраические выражения.**

### **11. Формулы сокращенного умножения**

Формулы сокращенного умножения и деления.

Преобразование выражений с модулями.

Разложение на множители числовых выражений.

Разложение на множители выражений с параметрами.

Деление многочленов с остатком.

Преобразование дробно-рациональных выражений.

Алгебраические выражения.

### **12. Иррациональные алгебраические выражения**

Извлечение квадратного корня из полного квадрата числового выражения и выражения с параметром.

Сложные радикалы.

Избавление от иррациональности в знаменателе числового выражения и выражения с параметром.

Сравнение иррациональных выражений.

Числовые оценки иррациональных выражений без параметров.

## **Тема 5. Иррациональные уравнения и неравенства.**

### **13. Основные методы решения иррациональных уравнений и неравенств**

Функция  $y = \sqrt{x}$ , график. Область определения, множество значений. Корни третьей, четвертой и старших степеней.

Графический метод решения иррациональных уравнений и неравенств.

Метод замены переменной. Использование одной и двух новых переменных.

Использование монотонности и метод подбора при решении иррациональных уравнений и неравенств.

### **14. Метод равносильных преобразований**

Уравнения и неравенства с полным квадратом под знаком квадратного корня.

Метод разложения на множители.

Универсальный метод решения иррациональных неравенств.

Иррациональные уравнения и неравенства.

Метод эквивалентных преобразований для иррациональных уравнений и неравенств.

Понятие эквивалентного преобразования.

Основные типы иррациональных уравнений и неравенств.

Метод неэквивалентных преобразований.

Понятие следствия.

Понятие проверки решения. Эффективные методы проверки.

## **Тема 6. Натуральные, целые, действительные числа.**

### **15. Целые, рациональные, действительные числа.**

Деление натуральных чисел с остатком и без остатка.

Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

Десятичная запись натуральных и целых чисел.

Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9. Признаки делимости на составные числа 6, 10, 12, 18, 36, 45, 72 и т.д.

Иррациональные числа. Иррациональность  $\sqrt{2}$  и некоторых других алгебраических констант.

Множество действительных чисел, числовая прямая. Сравнение действительных чисел. Модуль действительного числа.

Арифметические действия над обыкновенными и десятичными дробями.

Приведение периодической десятичной дроби к рациональному виду. Представление рационального числа в виде периодической десятичной дроби.

### **16. Уравнения в целых числах.**

Линейные уравнения в целых числах (диофантовы уравнения).

Системы линейных уравнений в целых числах.

Нелинейные уравнения в целых числах.

Системы нелинейных уравнений в целых числах.

Условия целочисленности рациональной функции.

### **17. Текстовые задачи с целочисленными решениями.**

Понятие объединения и пересечения множеств.

Подсчет количества элементов множества, обладающих одновременно двумя свойствами.

Подсчет количества элементов множества, обладающих одним из двух свойств.

## Тема 7. Текстовые задачи.

### 18. Понятие процентного отношения.

Понятие процентного отношения.

Двукратное применение процентного отношения.

Изменение процентного содержания одной из компонент в двухкомпонентной системе.

Изменение процентного содержания одной из компонент в многокомпонентной системе.

### 19. Понятие сложных процентов.

Основные закономерности сложных процентов.

Математические аспекты процесса прироста капитала в банке.

### 20. Задачи на движение.

Графическое изображение условий задачи.

Элементарные задачи на движение одного объекта.

Движение двух объектов с разными скоростями.

Движение вниз и вверх по реке.

Движение нескольких объектов по реке.

### 21. Понятие производительности труда.

Работа и производительность труда одного участника.

Совместная работа и производительность труда нескольких участников.

Повышение и понижение производительности труда и связанное с этим изменение времени выполнения.

### 23. Смеси и сплавы.

Вычисление концентрации смеси двух растворов.

Вычисление концентрации смеси трех растворов.

Максимальные и минимальные значения концентрации при смешивании.

Вычисление площади по радиусу описанного круга.

## Тема 8. Тригонометрические функции и тригонометрические формулы.

### 24. Тригонометрические формулы.

Тригонометрический круг. Измерение углов в радианах и градусах. Число  $\pi$ . Расположение точек 1, 2, 3, 4, 5, 6 радиан на тригонометрическом круге.

Определение тригонометрических функций числового аргумента.

Периодичность основных тригонометрических функций.

Четные и нечетные функции. Промежутки возрастания и убывания. Наибольшие и наименьшие значения, множество значений.

Графики тригонометрических функций.

Частные значения  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ .

Формулы приведения.

Формулы сложения и умножения.

Формулы двойного и половинного угла.

Вычисление тригонометрических функций для углов, кратных 15 градусам.

Преобразование тригонометрических выражений с модулями.

Корни основных тригонометрических функций. Знаки тригонометрических функций.

### 25. Тригонометрические функции.

Множество значений функции  $a \sin(bx + c)$ ,  $a \cos(bx + c)$ .

Множество значений функции  $a \sin x + b \cos x$ .

Множество значений квадратного трехчлена с тригонометрической функцией.

Множество значений функции  $\cos^n x + \sin^n x$  для  $n = 3, 4, 6, 8$ .

Множество значений дробно-линейной функции с тригонометрической функцией.

## **Тема 9. Тригонометрические уравнения и неравенства.**

### **26. Элементарные тригонометрические уравнения.**

Уравнения вида  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ .

Тригонометрические уравнения, разлагающиеся на множители.

Применение формул двойного и половинного угла.

Метод вспомогательного угла.

Элементарные тригонометрические неравенства.

### **27. Квадратные тригонометрические уравнения и неравенства.**

Тригонометрические уравнения, приводящиеся к квадратным.

Тригонометрические неравенства, приводящиеся к квадратным.

Тригонометрические неравенства, разлагающиеся на множители.

Тригонометрические неравенства, решаемые методом замены переменной.

## **Тема 10. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств.**

### **28. Метод разложения на множители в тригонометрии.**

Методы решения тригонометрических уравнений.

Применение преобразования суммы в произведение.

Применение преобразования произведения в сумму.

Отбор общих корней в нескольких сериях решений тригонометрических уравнений.

Иррациональные уравнения с тригонометрическими функциями.

### **29. Метод понижения порядка в тригонометрии.**

Понижение порядка тригонометрических уравнений.

Метод мажорант в тригонометрии.

Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.

Системы тригонометрических уравнений и неравенств.

## **Тема 11. Обратные тригонометрические функции.**

### **30. Обратные тригонометрические функции, свойства и графики.**

Область определения и множество значений обратных функций.

Формулы сложения обратных функций.

Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции.

Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции.

### **31. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.**

Простейшие уравнения с обратными функциями.

Простейшие неравенства с обратными функциями.

Линейные уравнения, включающие  $\arcsin x$  и  $\arccos x$ .

Квадратные уравнения и неравенства с обратными функциями.

## **Тема 12. Планиметрические задачи, треугольники.**

### **32. Прямоугольный и равнобедренный треугольники**

Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора.

Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

Равнобедренный треугольник. Вычисление радиусов вписанного и описанного круга.

### **33. Биссектриса треугольника**

Основные свойства биссектрисы.

Вычисление длины биссектрисы.

### **34. Медиана и высота треугольника**

Основные свойства медианы. Вычисление длины медианы.

Основные свойства высоты. Вычисление длины высоты.

Вписанная и описанная окружности.

### **35. Площадь треугольника**

Вычисление площади по двум сторонам и углу между ними.

Вычисление площади по стороне и двум прилежащим углам.

Вычисление площади по трем сторонам. Формула Герона.

Вычисление площади по радиусу вписанного круга.

## **Тема 13. Задачи с параметром.**

### **36. Линейные уравнения и неравенства с параметром.**

Линейные уравнения с параметром.

Линейные неравенства с параметром.

Линейные системы с параметром.

### **37. Квадратные уравнения и неравенства с параметром.**

Квадратные уравнения, системы и неравенства с параметром.

Условия, при которых заданный промежуток расположен между корнями (вне корней) квадратного уравнения.

Условия, при которых все числа заданного промежутка являются решениями квадратного неравенства.

Системы квадратных неравенств с параметром.

### **38. Уравнения с параметром в правой части.**

Уравнения с параметром в правой части.

Связь со множеством значений.

Уравнения и неравенства с ограничениями, зависящими от параметра.

Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами.

### **39. Квадратные уравнения и неравенства относительно параметра.**

Квадратные уравнения относительно параметра.

Алгебраические уравнения старших степеней, которые можно рассматривать как квадратные уравнения относительно параметра.

Тригонометрические уравнения относительно параметра.

Показательные уравнения относительно параметра.

Логарифмические уравнения относительно параметра.

Иррациональные уравнения относительно параметра.

Решение уравнений и неравенств на плоскости (параметр, переменная).

## **Тема 14. Графические методы решения уравнений и систем с параметром.**

### **40. Графические методы решения уравнений и неравенств. Многоугольники.**

Пересечение прямой и параболы.

Взаимное расположение ломаной и параболы.

Взаимное расположение двух парабол.

Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции.

Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции.

### **41. Графические методы решения уравнений и неравенств. Окружности.**

Графическое решение уравнений и систем уравнений, включающих уравнения окружностей, прямых, квадратов и других простейших фигур.

Пересечение прямой и окружности.

Взаимное расположение ломаной линии и окружности.

Взаимное расположение окружности и параболы.

Уравнение окружности с модулями.

## **Тема 15. Вычисление и применение производной.**

### **42. Вычисление производной.**

- Определение и геометрический смысл производной.
- Таблица производных. Правила вычисления производных.
- Вычисление производной сложной функции.
- Понятие о функциях, не имеющих производной в точке.

### **43. Построение и применение касательных.**

- Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.
- Свойства касательной к параболе.
- Свойства касательной к кубической параболе.
- Свойства касательной к гиперболе.
- Понятие касания графиков двух функций.

## **Тема 16. Применение производной для решения задач.**

### **44. Точки экстремума функции.**

- Нахождение участков монотонности.
- Исследование локальных экстремумов функции.
- Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.

### **45. Текстовые задачи.**

- Экстремальное значение суммы величин с заданным произведением.
- Экстремальное значение произведения величин с заданной суммой.
- Геометрическая интерпретация экстремальных задач.
- Экстремальное значение квадратичной функции двух переменных.
- Экстремальные задачи экономического содержания.
- Геометрические экстремальные задачи.
- Исследование количества корней уравнения с параметром.

### **46. Задачи, связанные с оптимизацией экономической деятельности.**

- Вычисление максимальной выручки при заданном объеме вложенных средств.
- Вычисление наименьшего объема вложенных средств для достижения заданной величины выручки.

### **47. Задачи оптимизации экономической деятельности, решаемые с применением производной.**

- Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств квадратного трехчлена.
- Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств степенных функций.

## **Тема 17. Планиметрические задачи, многоугольники, окружности.**

### **48. Теоремы синусов и косинусов.**

- Теорема синусов.
- Теорема косинусов.
- Подобие треугольников.

### **49. Окружности.**

- Измерение углов и дуг, связанных с окружностью.
- Вписанные и центральные углы.
- Свойство пересекающихся хорд в окружности.
- Свойство касательной и секущей.
- Метрические соотношения в круге.

### **50. Многоугольники.**

- Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат.
- Трапеция.

Метрические соотношения в четырехугольниках общего вида.  
Свойства четырехугольника, в который вписана окружность.  
Свойства четырехугольника, вокруг которого можно описать окружность.

## **Тема 18. Обратная функция, сложная функция, функциональные уравнения.**

### **51. Сложная функция.**

Понятие сложной функции.  
Вычисление области определения сложной функции.  
Вычисление множества значений сложной функции.  
Вычисление производной сложной функции.  
Вычисление наибольшего и наименьшего значений сложной функции.

### **52. Обратная функция.**

Понятие обратной функции.  
Общие правила построения обратной функции.  
Основные пары взаимно обратных функций: линейная, степенная, тригонометрические, показательная и логарифмическая.

### **53. Множество значений сложной функции.**

Множество значений композиции нескольких квадратных трехчленов.  
Композиция квадратного трехчлена и тригонометрической функции.  
Композиция квадратного трехчлена и логарифмической функции.  
Композиция квадратного трехчлена и показательной функции.

## **Тема 19. Последовательности и прогрессии.**

### **54. Арифметическая прогрессия.**

Понятие и свойства арифметической прогрессии.  
Вычисление суммы отрезка натурального ряда.  
Вычисление суммы отрезка арифметической прогрессии.  
Вычисление суммы множества натуральных чисел, определяемых свойствами делимости.

### **55. Геометрическая прогрессия.**

Понятие и свойства геометрической прогрессии.  
Вычисление суммы отрезка геометрической прогрессии.  
Задачи на составление уравнений, связанных со свойствами геометрической прогрессии.  
Задачи, в которых присутствуют одновременно арифметическая и геометрическая прогрессии.

### **56. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.**

Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии.  
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.  
Уравнения и неравенства, в которых присутствует сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература.

- Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки, Киров, 1994
- Алфутова Н. Б. Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.— М.: МЦНМО, 2002
- Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, М., МЦНМО, 2006
- Прасолов В.В. Задачи по стереометрии, М., МЦНМО, 2010
- Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу, М., МЦНМО, 2007
- Виленкин Н. Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика, М. МЦНМО, 2010
- Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия, М. МЦНМО, 2008
- Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы, М. МЦНМО, 2011
- Протасов В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии, 2005
- Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Яценко И.В., Московские математические олимпиады 1993-2005, М. МЦНМО, 2008

### Дополнительная литература

- Всероссийские олимпиады школьников по математике. Заключительные этапы, М. МЦНМО, 2010
- Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы, М. МЦНМО, 2007
- Жижилкин И.Д. Инверсия, 2009
- Заславский А.А. Геометрические преобразования, 2004
- Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи, 2011
- Толпыго А.К. Девяносто шесть нестандартных задач, 2008
- Толпыго А.К. Тысяча задач Международного математического Турнира городов, 2010
- Шаповалов А.В. Принцип узких мест, 2008
- Шень А., Игры и стратегии с точки зрения математики, 2008