Демонстрационный вариант и методические рекомендации по направлению “Прикладная математика и информатика”

Профиль: “Математическое моделирование”

Демонстрационный вариант

Все ответы при решении задач требуется обосновать. Учитываются решения тех 5 задач из 10, по которым достигнуто наибольшее продвижение. Правильное и полное решение каждой из этих задач оценивается в 20 баллов. Время выполнения заданий 3 часа.

1. Сколькими способами вершины куба можно раскрасить в восемь данных цветов, по одной вершине каждого цвета? Две раскраски считаются одинаковыми, если одну из них можно перевести в другую поворотом куба.

2. Пусть $f(x,y) = \max(x^2 - y^3, -x^3 + y^2)$.

(а) Вычислите производную функции $f(x,y)$ по направлению $l = (1,1)$ в точке $(0,0)$.

(б) Докажите, что данная функция не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

(в) Является ли точка $(0,0)$ точкой экстремума данной функции?

3. Граф со 100 вершинами имеет 98 вершин степени 30, и по одной вершине степеней 25 и 15.

а. Докажите, что вершины степеней 25 и 15 лежат в одной компоненте связности.

б. Обязательно ли данный граф будет связным?

4. На рисунке изображен двудольный граф Γ, в котором V_1 есть множество меломанов, а V_2 — множество музыкальных исполнителей:

$V_1 = \{$ Маша, Петя, Федя, Алёна $\}$,

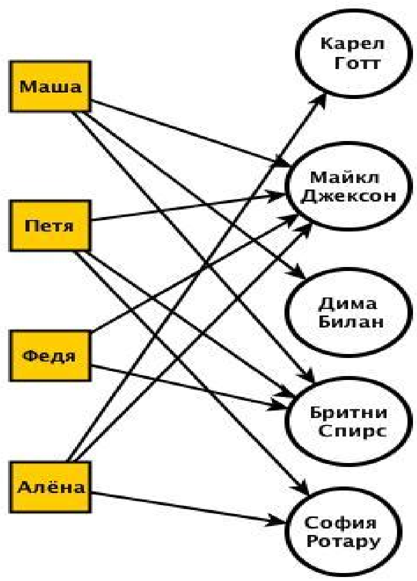

Рис. 1: граф к задаче 4

$V_2 = \{$ Карел Готт, Майкл Джексон, Дима Билан, Бритни Спирс, София Ротару $\}$. Ребро $\{t, s\}$ между $t \in V_1$ и $s \in V_2$ принадлежит графу Γ, если персона s — музыкальный кумир персоны t. Определим максимальное сообщество меломанов с похожими вкусами как полный двудольный подграф графа Γ, к которому нельзя добавить вершины из V_1 и V_2, не нарушив свойство полноты. Например, такое сообщество будет образовывать двудольный подграф на множествах вершин $\{$ Маша, Петя, Федя$\}$ и $\{$Бритни Спирс, Майкл Джексон$\}$.

а. Найдите все максимальные сообщества меломанов для заданного графа.

б. Введите отношение быть более крупным сообществом и постройте граф этого отношения для всех найденных сообществ (для простоты вычислений элементы V_1 можно переобозначить цифрами 1, 2, 3 и 4, а элементы V_2 — первыми буквами латинского алфавита a, b, c, d и e).

в. Каково максимальное число таких сообществ для двудольного графа в худшем случае, если $|V_1| = n$ и $|V_2| = m$?

5. Предположим, что квадратные комплексные матрицы A, B и C порядка 5 удовлетворяют условию $AB = BC$, причем C — диагональная матрица.

а. Докажите, что если B — невырожденная матрица, то существует базис пространства $\mathbb{C}^5$, состоящий из собственных векторов матрицы A.

б. Предположим, что $\operatorname{rk} B = 4$. Из каких клеток состоит жорданова форма матрицы A?

6. Случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ распределён равномерно в квадрате $\{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$.

а. Найдите условную плотность случайной величины η при условии $\xi = x$ и постройте её график.

б. Вычислите условное математическое ожидание $E(\eta|\xi = x)$ и условную дисперсию $D(\eta|\xi = x)$.

в. Исследуйте ξ и η на независимость.

7. Пусть для натурального n число x_n — корень уравнени $x = \operatorname{tg} x$ из интервала $\big(\pi n;\, \pi(n+1)\big)$. Докажите, что

$$x_n = \pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

8. Выборка $X_1, \ldots, X_n$ соответствует распределению Релея с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{\theta} x e^{-x^2/\theta}, & x \geq 0. \end{cases}$$

а. Постройте оценку максимального правдоподобия неизвестного параметра θ.

б. Докажите несмещенность построенной оценки.

9. Найдите максимум функции при заданных ограничениях:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = min\{3x_1 + x_2, 4x_2 + x_1\} \to max \\ (x_1 + 1)(x_2 + 2) \leqslant 8, \\ (x_1 - 1)(x_2 + 3) \leqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

10. Известно, что число дуг любого простого пути в ориентированном графе G не превосходит 4. Сколько цветов понадобится для такой раскраски вершин графа G, чтобы вершины одного цвета не были смежны?

Ответ обоснуйте, т.е. докажите, что этого количества цветов всегда достаточно для раскраски, и приведите пример графа G с заданным свойством, который невозможно раскрасить в меньшее количество цветов.

Методические рекомендации

Тематика письменной работы соответствует разделам прикладной математики и информатики, обозначенным в Государственном образовательном стандарте высшего профессионального образования по направлению подготовки бакалавра 010500.62 “Прикладная математика и информатика”:

1. Математический анализ
2. Дифференциальные уравнения
3. Линейная алгебра
4. Методы оптимизации
5. Теория вероятностей и математическая статистика
6. Дискретная математика
7. Информатика

Для подготовки к олимпиаде рекомендуются следующие учебные пособия:

1. Ильин В.А. Линейная алгебра.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1,2
4. Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, т.1-3.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под редакцией Б.П. Демидовича.
6. Л.С.Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения
7. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
8. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.
9. Крамер Г. Математические методы статистики.
10. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика.
11. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера.
12. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
13. Оре О. Теория графов.