Олимпиада для студентов и выпускников вузов – 2013 г.

Демонстрационный вариант и методические рекомендации

по направлению «Математические методы анализа экономики»

Профили:
«Математические методы анализа экономики»
«Экономика»
«Статистический анализ экономических и социальных процессов»

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполнения задания – 180 мин.

Решите задачи.

1. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+5n+1}-2n}{e^{\cos(arctg(n))}}$$

2. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Исследуйте на экстремум следующую функцию: $F(x,y)=4x^3+10x^2+2y^2+2xy^2+9$

4. Пусть $F(x,y)=9-x^2-y^2,\ a+bx+cy=0,\ a,b,c\neq 0$ При каких значениях параметров ограничения множество условных локальных экстремумов функции F(x,y) будет не пусто? Каков характер этих экстремумов?

5. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y^5+3x^2\cos(y)}{x^3\sin(y)-3y^2-5y^4x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$.

6. Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.

А) Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?
Б) Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?
В) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?
Г) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?

7. Для того чтобы поступить в университет, абитуриенту Васе Смирнову необходимо сдать два экзамена: по математике и по английскому языку. Экзамен по математике оценивается по десятибалльной шкале, а экзамен по английскому языку по пятибалльной. Предполагается, что шкалы оценок непрерывные, например, на экзамене по математике абитуриент может получить 4.734(34)… балла. Известно, что для поступления на бюджет

необходимо набрать 11 из 15 баллов. Кроме того, необходимо получить по математике не ниже 4 баллов, а по английскому языку не ниже 3 баллов для того, чтобы участвовать в конкурсе на бюджетные места. Функция совместной плотности распределения вероятности получения определенной оценки по математике (x) и по английскому языку (y) для Васи имеет следующий вид: $f(x,y) = \begin{cases} axy, (x,y) \in D \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$, где область D: $\{0 \le x \le 10, 0 \le y \le 5\}$. Определите значение параметра a, при котором указанная функция может являться функцией плотности. Найдите вероятность того, что Вася поступит на бюджет. Как изменится вероятность поступления на бюджет, если известно, что за экзамен по английскому Вася получил 4 балла?

8. Известно, что случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0;a]$. Исследователь проверяет гипотезу $H_0: a = 10$ против $H_A: a > 10$ с помощью следующего критерия: отвергнуть H_0 в пользу H_A, если $X > c$. Каким должно быть число c, если исследователь хочет осуществить проверку на уровне значимости 10%? При $c = 8$ выразите мощность критерия как функцию от a.

9. Статистик Тимофей оценивает доверительный интервал для математического ожидания по большой выборке по формуле $\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$. Тимофей забыл таблицы нормального распределения и не может точно вспомнить значение $z_{\frac{\alpha}{2}}$ для уровня доверия (доверительной вероятности) 95%. Определите, каков будет уровень доверия, если

а) Тимофей подставит значение $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2$;

б) Тимофей воспользуется следующим выражением для доверительного интервала: $\bar{X} - 1.5 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 2.5 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$.

10. Посредник, торгующий подержанными автомобилями, для получения данных о предложениях продажи пользуется журналом, где публикуются цены предложения (Price), возраст автомобиля (Age), его пробег (Run), наличие сигнализации (Signal) и музыкальной системы (Music). Посреднику необходимо решить две проблемы.

1) У посредника сложилось впечатление, что для более старых машин величина пробега меньше интересует покупателей, чем для более новых. Какая из приведенных ниже моделей позволит ему проверить свою гипотезу и каким образом? Можно ли считать полученный результат доказательством гипотезы посредника? Посредник верит, что выполняются все основные гипотезы модели линейной регрессии, в том числе гипотеза о нормальном распределении случайной составляющей.

$a)\ Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 Age_t + w_t$

$b)\ Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 Age_t + c_3 Run_t Age_t + w_t$

$c)\ Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 (Age_t)^2 + w_t$

$d)\ Price_t = c_0 + c_1 Run_t + c_2 \ln(Run_t Age_t) + w_t$

2) Посреднику необходимо оценить среднестатистический автомобиль, пробег которого составляет 49,52 тыс. км. Такого автомобиля в его базе еще нет. Если он укажет неверную «вилку цен», то сделка не состоится. Посредник может позволить себе ошибиться в среднем в пяти случаях из ста. Какие границы цен он должен назначить, если

для грубой оценки стоимости автомобиля посредник использует модель $\underset{}{Price_t} = \underset{(0,412)}{1{,}304} + \underset{(0,007)}{0{,}054}\, Run_t$? Подойдет ли эта оценка для автомобиля с пробегом 80 тыс. км?

Здесь в скобках стоят стандартные ошибки оценок. Оценка стандартной ошибки случайной составляющей $s = \sqrt{s^2} \approx 1{,}660$. Ковариационная матрица оценок коэффициентов имеет вид $C = \begin{pmatrix} 0{,}17 & -0{,}003 \\ -0{,}003 & 0{,}00005 \end{pmatrix}$. Посредник верит, что случайная составляющая имеет нормальное распределение.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Предварительные критерии оценивания

Оценивание работ участников олимпиады осуществляется по стобалльной шкале. Каждая задача оценивается максимум в 10 баллов.

Перечень и содержание тем олимпиадных состязаний

1. Линейная алгебра.

1.1. Векторы, матрицы и действия с ними. Линейная зависимость системы векторов.
Базис линейного пространства. Скалярное произведение.

1.2. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей. Разложение определителя по строке и по столбцу.

1.3. Транспонированная матрица. Обратная матрица. Ранг матрицы. Специальные виды матрицы.

1.4. Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса.
Ф ундаментальная система решений.

1.5. Собственные числа и собственные векторы матрицы.

1.6. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Условие положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.

2. Математический анализ.

2.1. Функции одной переменной. Предел функции. Производные. Разложение функции в ряд Тейлора. Исследование и построение графика функции.

2.2. Функции многих переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Градиент функции. Производная по направлению. Матрица Гессе. Безусловный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных.

2.3. Понятие о квадратичных формах. Выпуклые функции и множества. Примеры экономических приложений. Оптимизация при наличии ограничений. Функция Лагранжа и ее стационарные точки. Максимизация полезности и бюджетное ограничение. Окаймленный Гессиан. Условия второго порядка.

3. Дифференциальные уравнения.

3.1. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения в полных дифференциалах. Метод замены переменных. Уравнение Бернулли.

3.2. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод вариации постоянной.

3.3. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Устойчивость решения.

3.4. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

4. Теория вероятностей.

4.1. Основные понятия теории вероятностей. Случайные события и случайные величины. Функция плотности распределения. Совместное распределение нескольких случайных величин. Условные распределения.

4.2. Характеристики распределений случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, ковариация). Свойства математического ожидания, дисперсии и ковариции. Условное математическое ожидание.

4.3. Нормальное распределение и связанные с ним хи-квадрат распределение, распределения Стьюдента и Фишера, и их основные свойства. Статистические таблицы и их использование.

5. Математическая статистика.

5.1. Генеральная совокупность и выборка. Выборочное распределение и выборочное характеристики (среднее, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции). Корреляционная связь.

5.2. Статистическое оценивание. Точечные оценки. Линейность, несмещенность, эффективность и состоятельность оценок. Интервальные оценки, доверительный интервал.

5.3. Статистические выводы и проверка статистических гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень доверия, уровень значимости, мощность критерия и P-value теста. Проверка значимости.

5.4. Линейная регрессионная модель для случая одной и нескольких объясняющих переменных. Теоретическая и выборочная регрессии. Природа случайной составляющей. Линейность по переменным и параметрам.

5.5. Оценивание параметров. Метод наименьших квадратов (МНК). Свойства оценок параметров, полученных по МНК. Разложение суммы квадратов отклонений. Дисперсионный анализ. Степень соответствия линии регрессии имеющимся данным. Коэффициент детерминации и его свойства.

5.6. Классическая линейная регрессия. Статистические характеристики (математическое ожидание, дисперсия и ковариация) оценок параметров. Теорема Гаусса-Маркова.

5.7. Предположение о нормальном распределении случайной ошибки в рамках классической линейной регрессии и его следствия. Доверительные интервалы оценок параметров и проверка гипотез об их значимости. Проверка адекватности регрессии. Прогнозирование по регрессионной модели и его точность.

Список рекомендуемой литературы

Литература (разделы из учебников, соответствующие программе)

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Теория вероятностей и прикладная статистика. / Том 1. М.: Юнити-Дана, 2001.

2. Айвазян С.А. (2001). Прикладная статистика. Основы эконометрики. Том 2. – М.: Юнити-Дана, 2001.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнения по математическому анализу. М.: ООО «Изда- тельствао АСТ», 2003

4. Ильин В.А., Ким Г.Д., Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект, 2008.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2006.

6. Катышев П., Магнус Я., Пересецкий А., Головань С. Сборник задач к начальному курсу эко- нометрики. 4-е дополненное и переработанное издание. Москва, Дело. 2007.

7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, тт.1,2,3.М.:Дрофа, 2003.

8. Магнус Я., Катышев П., Пересецкий А. Эконометрика. Начальный курс. 8-е исправленное издание. Москва, Дело, 2007.

9. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р. Теория вероятностей и статистика - 2-е изд.,перераб. М.: МЦНМО, 2008.

10. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Регулярная и хаотиче- ская динамика, 2004.

11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт.1-3. М.: Физ- матлит, 2006.

12. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, тт.1,2. М.: Физматлит, 2002.

13. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2005.

14. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика-2 (промежуточный уровень) Москва: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2007.

15. Chiang A.C. Fundamental methods of matematical economics. McGrow Hill, 1984.

16. Simon C.P., Blum L. Mathematics for Economists. WW Norton & Company. NY–London, 1994.