

Олимпиада для студентов и выпускников вузов – 2013 г.

Демонстрационный вариант и методические рекомендации по направлению «Прикладная математика и информатика»

Профиль:

«Математические методы естествознания и компьютерные технологии»

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполнения задания – 180 мин.

Решите задачи.

1. Сколько существует различных игральных костей ? (Игральная кость – это кубик, на гранях которого написаны числа от 1 до 6; две кости считаются одинаковыми, если одну можно перевести в другую поворотом).

2. Докажите, что если все собственные значения симметричной 3×3 матрицы A простые (не кратные) и матрица A^4 совпадает с единичной матрицей E , то хотя бы одна из матриц $E + A$ или $E - A$ вырождена (имеет нулевой определитель).

3. Рассматривается уравнение Ньютона $\frac{d^2x}{dt^2} = -U'(x)$ в поле сил с потенциалом $U(x) = -(x-a)^2(x+a)^2$. Требуется описать все начальные условия, при которых решение этого уравнения не уходит на бесконечность при $t \rightarrow \infty$.

4. Каков предел при $t \rightarrow \infty$ решения $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4u, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t,$$

удовлетворяющего краевым условиям Дирихле $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ и начальному условию $u(x, 0) = x(\pi - x)(x - \pi/2)$?

5. Найти разложение функции $I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^1 e^{-(2-x)\varepsilon} e^{-x^2} dx$ в асимптотический ряд вида $I(\varepsilon) = f(\varepsilon)(a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots + O(\varepsilon^N))$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

6. Следующая схема является простейшей дискретной моделью распространения тепла. На сторонах треугольника написано по числу. Каждое из этих чисел заменяют на среднее арифметическое его двух соседей; в результате, на сторонах возникает новая тройка чисел. Затем всю процедуру повторяют, и т.д. Какие числа получатся на сторонах треугольника в пределе, когда количество итераций стремится к бесконечности ?

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Оценивание работ участников олимпиады осуществляется по стобалльной шкале. Учитываются решения тех 5 из 6 задач, по которым достигнуто наибольшее продвижение. Правильное и полное решение каждой из задач оценивается в 20 баллов.

- Перечень и содержание тем олимпиадных состязаний

Темы соответствуют разделам прикладной математики и информатики, обозначенным в Государственном образовательном стандарте высшего профессионального образования по направлению подготовки бакалавра 010400.62 «Прикладная математика и информатика»

- математический анализ,
- линейная алгебра,
- дискретная математика,
- дифференциальные уравнения.

В варианте олимпиадного задания могут быть представлены не все из перечисленных тем.

- Список рекомендуемой литературы

1. В.А. Ильин. Линейная алгебра.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа.
3. Ф.А. Новиков. Дискретная математика для программистов.
4. Л.С.Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
5. В.И.Арнольд. Математические методы классической механики.
6. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики.
7. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики.