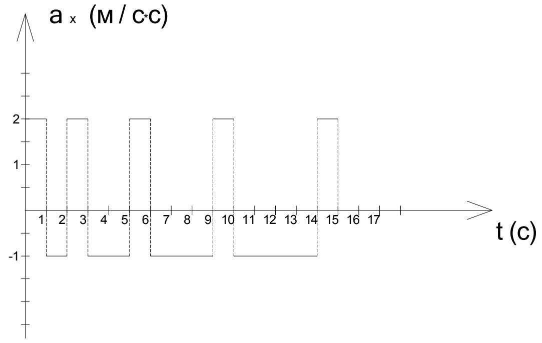
11 класс

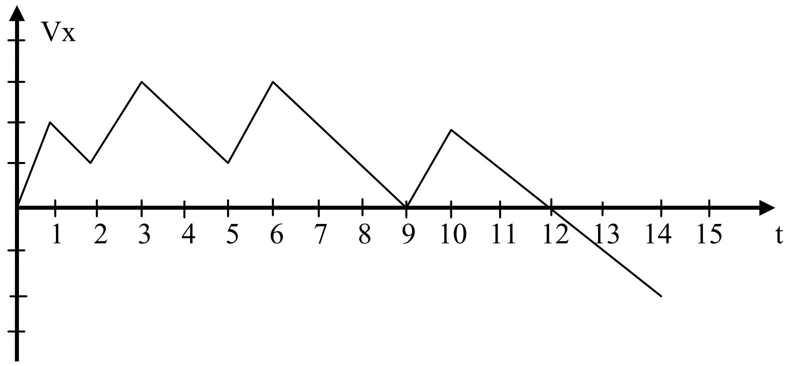
Задача 1. Материальная точка движется вдоль оси x с ускорением, изменяющимся во времени так, как показано на рисунке. Начальная скорость равна нулю. Через какое время точка окажется на максимальном расстоянии от начального положения и чему равно это расстояние?



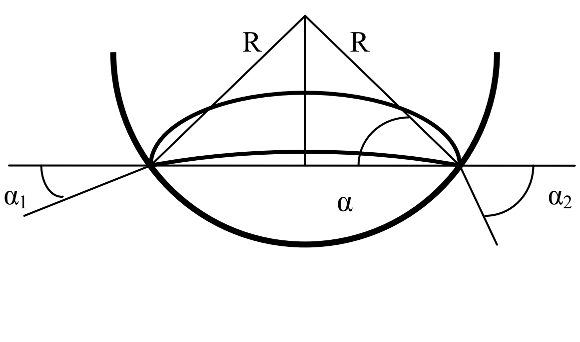
Для решения задачи необходимо построить график $V_x(t)$

По графику видно, что скорость изменяет свой знак через 12с, следовательно, именно в этот момент материальная точка окажется на максимальном расстоянии от начальной точки.

Вычисляя площадь фигуры, ограниченной графиком скорости, получим, что максимальное расстояние равно 18м.



Задача 2. В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь о ее стенки в двух точках, расположенных на одной горизонтали. Промежуток времени между двумя ударами при движении в одну сторону всегда равен T_1 , а при движении обратно $T_2 \neq T_1$. Найти радиус лунки.



Дано:	*Решение:*
T_1 $T_2 \neq T_1$	Будем считать, что в точке удара шарика о лунку радиус лунки образует с горизонтом угол α, первый раз шарик отлетает от лунки по углом α_1 к горизонту, а второй –под углом α_2.
R-?	Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, вычисляется по формуле:

$$l=\frac{2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Столкновение шарика со стенками лунки является упругим, поэтому начальные скорости шарика в обоих случаях одинаковы, дальности полета тоже равны, поэтому:

$$\sin\alpha_1\cos\alpha_1=\sin\alpha_2\cos\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=\pi/2 \Rightarrow \alpha = \pi/4$$

Из треугольника ОАВ имеем:

$$R=\frac{l}{2\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{l}{\sqrt{2}}$$

Время полета шарика и дальность его полета могут быть так же вычислены по формулам:

$$T_1=\frac{2v_0 \sin\alpha_1}{g} \quad \text{и} \quad l=v_0\cos\alpha_1 T_1$$

Аналогичные уравнения можно записать и для угла α_2.
Используя основное тригонометрическое тождество , получим:

$$\sin^2\alpha_1+\cos^2\alpha_1=\sin^2\alpha_2+\cos^2\alpha_2$$

Выражая $\sin\alpha_1$ и $\cos\alpha_1$ из уравнений для времени и дальности полета и проделав аналогичные вычисления для второго угла, получим:

$$\frac{g^2T_1^2}{4}+\frac{l^2}{T_1^2}=\frac{g^2T_2^2}{4}+\frac{l^2}{T_2^2} \qquad \Rightarrow$$

$$l=\frac{g}{2}T_1T_2 \quad \Rightarrow \quad R=\frac{gT_1T_2}{2\sqrt{2}}$$

Задача 3. Шарик, подвешенный на невесомой пружине, совершает колебания с периодом T=3,0 с. Каким станет период колебаний, если снизу к шарику поднести горизонтальную плиту, с которой шарик будет периодически упруго сталкиваться? Расстояние от положения равновесия шарика до плиты равно половине амплитуды.

Дано:	*Решение:*
T=3,0 с. $x=\frac{A}{2}$	Пусть сначала шарик совершает колебания по закону: $x = A\sin\omega t$
T_0-?	Время t_1, за которое шарик проходит от положения равновесия до точки, где поместили плиту, получим из уравнения:

$$\frac{A}{2} = A\sin\omega t_1 \Rightarrow \sin\omega t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{6}$$

Зная, что период колебаний маятника связан с циклической частотой колебаний соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

получим $$t_1 = \frac{T}{12}$$

Период колебаний маятника после поднесения плиты будет равен:

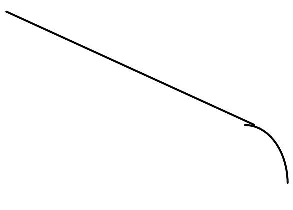
$$T_0=T/2+2t_1 \qquad \Rightarrow T_0 = \frac{2T}{3}.$$

Подставляя численные значения, получим: T_0=2,0 с.

Задача 4. Лыжники скатываются со склона горы с углом α, переходящего в закругление радиусом R. На каком минимальном расстоянии от места закругления склона должна располагаться стартовая площадка лыжников, чтобы они, достигнув закругления , начали свободный полет? Коэффициент трения между лыжами и снегом $\mu<\mathrm{tg}\,\alpha$. Начальная скорость лыжников равна нулю.

Дано:	*Решение:*
α R $\mu<\mathrm{tg}\,\alpha$	Для того, чтобы в начале закругления лыжник начал свободный полет, нужно, чтобы в этой точке сила реакции опоры стала равна 0 и на лыжника в момент попадания на закругление действовала только сила тяжести.
L-?	Из второго закона Ньютона в проекции на ось, направленную к центру окружности, получим скорость лыжника в этой точке:

$$v^2 = Rg\cos\alpha$$



Далее используем закон сохранения полной механической энергии:

$$E_2 - E_1 = A_{тр},$$

где E_2- полная механическая энергия тела на вершине горы, E_1- полная механическая энергия в момент перехода на закругление, $A_{тр}$ - работа силы трения при прохождении спуска.

Получаем: $$mgh-\frac{mv^2}{2}=\mu mgL\cos\alpha$$

h-высота спуска, L-его длина, поэтому: $h=L\sin\alpha$. Решая полученные уравнения, получаем:

$$L=\frac{R}{2(tg\alpha-\mu)}$$

Задача 5. С одним молем гелия проводят циклический процесс, состоящий из двух изотерм и двух изохор. При изохорическом нагревании газ получает Q_1=1000 Дж в виде тепла, при изотермическом расширении еще Q_2=500 Дж. Минимальная температура в процессе составляет T=300К. Найти максимальную температуру газа и КПД цикла.

Дано:	*Решение:*
Q_1=1000 Дж Q_2=500 Дж T=300К	По первому закону термодинамики, тепло, преданное газу, идет на совершение газом механической работы и на изменение его внутренней энергии. При изохорном процессе газ работы не совершает, поэтому все преданное газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии
$T_{мах}$-?	(нагревание), поэтому:

$$Q_1=\frac{3}{2}\nu R\left(T_{\max}-T\right)\Rightarrow T_{\max}=\frac{2Q_1}{3R}+T$$

КПД цикла равен:

$$\eta=\frac{A}{Q_1+Q_2}$$

где A - работа газа за цикл, Q_1+Q_2 - тепло, преданное газу за цикл.

Пусть A_2 - работа газа при изотермическом расширении при $T_{\max}$, A_1 - работа газа при изотермическом расширении при T (изменение объема в обоих случаях одинаково), тогда

$$A=A_2-A_1$$

Для работы газа при изотермическом процессе имеем:

$$A_2=\nu RT_{\max}\ln\frac{V_2}{V_1}\qquad A_1=\nu RT\ \ln\frac{V_2}{V_1}\quad\Rightarrow\quad\frac{A_2}{A_1}=\frac{T_{\max}}{T}$$

По первому закону термодинамики, учитывая, что при изотермическом расширении внутренняя энергия газа не изменяется, получим:

$$A_2=Q_2\Rightarrow A=A_2-A_1=A_2-A_2\frac{T}{T_{\max}}=Q_2\left(1-\frac{T}{T_{\max}}\right)\text{ и}$$

$$\eta=\frac{Q_2}{Q_1+Q_2}\left(1-\frac{T}{T_{\max}}\right)$$

Подставляя числовые значения, имеем:

$T_{мах}$=380 К

η=7 %

Задача 6. В вакууме находятся три тонкие концентрические металлические сферы радиусами R, $2R$ и $4R$. Первая и третья сферы не заряжены, а второй сообщен заряд q. Найти потенциал второй сферы после соединения первой и третьей тонким изолированным проводом через небольшое отверстие во второй сфере.

Дано:	*Решение:*
R $2R$ $3R$ q	Потенциалы двух сфер, соединенных проводником, должны быть одинаковы, поэтому после соединения произойдет перераспределение зарядов и заряд внутренней сферы станет q_1, заряд внешней сферы q_3. Так как сферы 1 и 3 были сначала не заряжены, то $q_1+q_3=0.$
φ -?	По принципу суперпозиции полей потенциал любой точки является суммой потенциалов, создаваемых каждой сферой в этой точке

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

Потенциал внутри равномерно заряженной сферы равен:

$$\varphi = k\frac{q}{R_c}, \text{ где } R_c \text{- радиус сферы}$$

Потенциал снаружи такой сферы:

$$\varphi = k\frac{q}{r}, \text{ где r-расстояние до центра сферы.}$$

Приравнивая потенциалы внешней и внутренней сфер, получим:

$$\frac{kq_1}{R}+\frac{kq}{2R}+\frac{kq_3}{4R}=\frac{kq_1}{4R}+\frac{kq}{4R}+\frac{kq_3}{4R} \Rightarrow q_1=-\frac{q}{3} \text{ и соответственно, } q_3=\frac{q}{3}$$

Тогда потенциал средней сферы равен:

$$\varphi=\frac{kq}{2R}-\frac{kq}{6R}+\frac{kq}{12R}=\frac{5kq}{12R}=\frac{5q}{48\pi\varepsilon_0 R}$$

Задача 7. Кольцо из медной проволоки помещено в поперечное магнитное поле с индукцией B=0,10 Тл. При повороте кольца на угол φ =90^{o} вокруг диаметра, по нему прошел заряд q=1,0 Кл. Найти массу кольца. Удельное сопротивление меди ρ=1,7· 10^{-8} Ом· м, плотность D=8,9 ·10^{3}кг/м^{3}.

Дано:	*Решение:*
B=0,10 Тл φ =90^{o} ρ=1,7· 10^{-8} Ом· м D=8,9 ·10^{3}кг/м^{3} q=1,0 Кл	При повороте кольца на угол φ =90^{o} вокруг диаметра, в кольце по закону электромагнитной индукции возникает ЭДС индукции ε и протекает индукционный ток: $I=\frac{\varepsilon}{R}$, где R-сопротивление проводника
m-?	По закону Фарадея:

$$I=\frac{\Delta\Phi}{R\Delta t}=\frac{BS}{R\Delta t}, \text{ где S-площадь кольца}$$

Сопротивление проводника:

$$R = \rho \frac{l}{s}, \quad S = \pi r^2, \; l = 2\pi r$$

l-длина проводника, s-площадь поперечного сечения проволоки, r-радиус кольца.
Заряд, протекший по кольцу:

$$q = I\Delta t = \frac{BS}{R} = \frac{B\pi r^2 s}{\rho 2\pi r} = \frac{Brs}{2\rho}$$

Масса кольца равна:

$$m = DV = Dsl = Ds2\pi r$$ V- объем проволоки

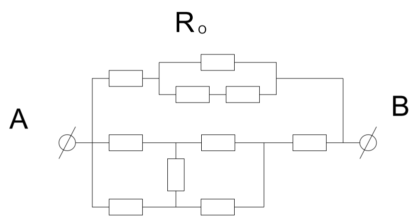
используя два последних уравнения, получаем:

$$m = \frac{4\pi Dq\rho}{B}$$

Подставляя числовые значения, получим:

m=20 г.

Задача 8. Соединили 10 плавких предохранителей так, как показано на рисунке. Отдельный предохранитель перегорает, если ток через него превышает I_0=12 А. Найти силу тока, при превышении которой точки А и В будут изолированы друг от друга.



Дано:	*Решение:*
I_0=12А N=10	Заметим, что в нижней части схемы есть сопротивление , которое включено между точками с одинаковым потенциалом, поэтому ток через это сопротивление всегда равен 0, и следовательно, его можно не учитывать.
I-?	Таким образом, эквивалентная схема содержит две параллельные цепочки с сопротивлением 5/3 R и 2 R и токами I_1 и I_2.

Точки А и В будут изолированы друг от друга при перегорании первого предохранителя в верхней части цепи.
Для этого ток через это сопротивление должен быть равен I_0, то есть $I_1 = I_0$
Так как верхняя и нижняя часть соединены параллельно, получим:

$5/3 I_1 = 2 I_2 \Rightarrow I_2 = 5/6\, I_0$

$I=I_1+I_2=11I_0/6.$

Подставляя числовые значения, получим:

$I=22$ А.

Задача 9. Электрон влетает в область пространства, где созданы однородные электрическое и магнитное поля, силовые линии которых параллельны друг другу. В начальный момент времени скорость электрона перпендикулярна силовым линиям. Магнитная индукция B=1,0Тл. Найти напряженность электрического поля, если после n=40 витков спирали электрон сместился на расстояние L=1,8см.

Дано:
B=1,0Тл
n=40
L=1,8см
$q=1{,}6\ 10^{-19}$ Кл
$m=9\ 10^{-31}$кг

E-?

Решение:

Электрон будет двигаться вдоль силовых линий по спирали, радиус которой и период обращения электрона определяется величиной магнитной индукции. Используя второй закон Ньютона, получим:

$$qvB=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow R=\frac{mv}{qB}$$

q- заряд электрона, m- масса электрона, v- скорость движения по окружности, R-радиус окружности (спирали).

Период вращения:

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi m}{qB}$$

Расстояние, на которое сместится электрон за n витков, можно вычислить по формуле:

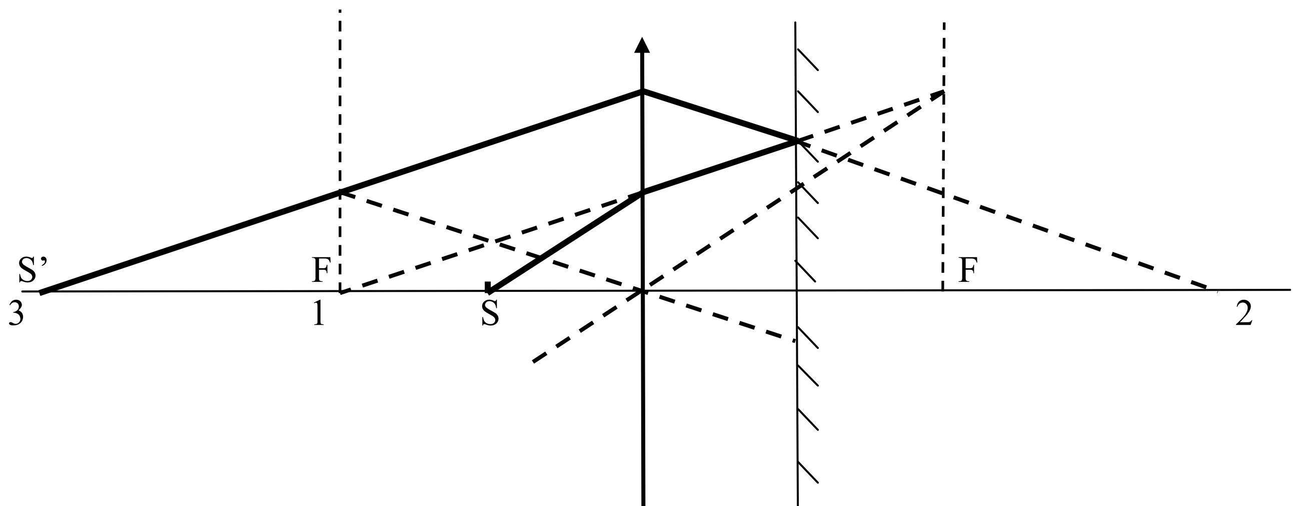
$$L=\frac{at^2}{2}=\frac{qEn^2T^2}{2m}\text{, где } a=\frac{qE}{m}\text{, а } t=nT=\frac{2\pi nm}{qB}\ \Rightarrow$$

$$E=\frac{qLB^2}{2mn^2\pi^2}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$E=10^5$ В/м

Задача 10. Слева от линзы с фокусным расстоянием F=50см, на расстоянии a=25см от нее, расположена светящаяся точка. Справа на таком же расстоянии расположено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы окажется изображение точки в этой системе?



Дано:	*Решение:*
F=50см a=25см	Используя формулу тонкой линзы, учитывая, что $a = \frac{F}{2}$ получим, что в отсутствие зеркала, линза дала бы мнимое изображение 1 точки, совпадающее с передним фокусом линзы: $$\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \Rightarrow f = -\frac{1}{F} = \text{-50см}$$
L-?	Это изображение 1 является предметом для зеркала, которое в отсутствие линзы дало бы мнимое изображение 2.

Это изображение 2 будет расположено на расстоянии 75см от зеркала и на расстоянии 1м от линзы.

Изображение 2 будет, в свою очередь, источником для линзы и так как оно оказывается на расстоянии 2F от линзы, то и его действительное изображение окажется на расстоянии

L=2F=1м слева от линзы.