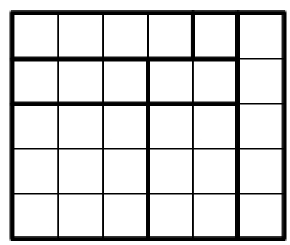
8 класс

Для каждой задачи приведено условие, ответ, критерии оценивания и полное решение, а также, в некоторых случаях, достопримечательные решения, придуманные участниками олимпиады. По каждой задаче оценка “0” ставилась в случае отсутствия в чистовике следов работы над задачей и отсылок к черновику, положительная оценка “a” ставилась за полное решение, промежуточные оценки b, c, d,.. ставились за решения с пробелами или ошибками, перечисленными в разделе “критерии” в порядке убывания стоимости, а отрицательная оценка “e” ставилась за любую работу над задачей, не удовлетворяющую никаким из указанных критериев *(в частности, кроме задачи 1, за ответ без какого-либо обоснования).*

8.1. Дан прямоугольник с длинами сторон 5 и 6. Разбейте его на семь неперекрывающихся прямоугольников с целочисленными сторонами, параллельными сторонам исходного прямоугольника, так, чтобы площади этих семи прямоугольников были попарно различны.

Ответ:



8.2. Докажите, что число $10^{(10^{(10^{2013})})}+10^{(10^{2013})}+10^{2013}-1$ не простое.

Ответ: делится на 11.

Критерии

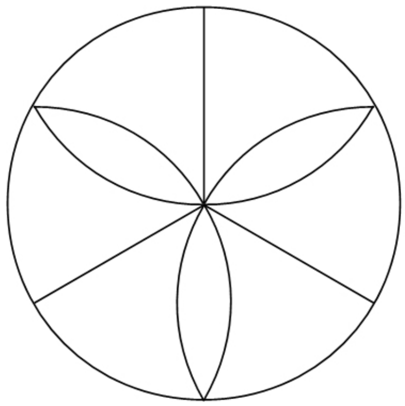
b – полное решение с незначительным пробелом в обосновании.

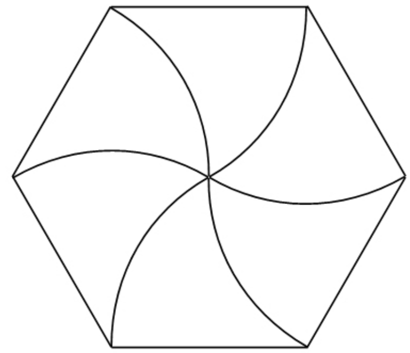
d – делимость на 11 утверждается без обоснования.

Решение. $10^{(10^{(10^{2013})})}+10^{(10^{2013})}+10^{2013}-1=100^a-1+10^{2013}(10^b+1)$, где $a=10^{(10^{2013})}/2$ и $b=10^{2013}-2013$ – натуральные числа. Используем формулы сокращенного умножения: $100^a-1=(100-1)(100^{a-1}+100^{a-2}+\ldots)$ делится на 99, а значит на 11, и $10^b+1=(10+1)(10^{b-1}-10^{b-2}+\ldots)$ делится на 11.

8.3. Можно ли разрезать круг на части таким образом, чтобы а) центр круга находился на границе каждой из частей и б) из некоторых частей, полученных в результате разрезания, можно было составить вписанный в этот круг правильный шестиугольник? Если можно, то опишите разрезание и укажите, как составить шестиугольник из полученных частей; если нет, то докажите, что нельзя.

Ответ: Впишем в окружность с центром O и радиусом r правильный шестиугольник $ABCDEF$, разрежем окружность по отрезкам AO, CO, EO и дугам окружностей с центрами A, C и E, радиусом r и концами в точках B, D и F (на картинке слева). Также разрежем правильный шестиугольник по дугам окружностей с центрами A, B, C, D, E, F, радиусом r, общим концом O и со вторыми концами в точках B, C, D, E, F, A соответственно (на картинке справа). Тогда криволинейные треугольники на левой картинке равны криволинейным треугольникам на правой.





Критерии

`b` – верно описано разрезание, но не описано составление правильного шестиугольника, либо не указаны равные дуги.

`g` – описано верное разрезание, неверно указаны равные дуги (как правило, отмечались пары равных дуг, хотя дуги должны быть равны все).

`c` – описано разрезание, позволяющее составить шестиугольник с наложениями.

`f` – доказано, что при разрезании прямыми линиями решения нет.

`d` – неправильно понято условие, описано разрезание, которое не удовлетворяет пункту (а).

8.4. Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения $2x^2-y^2 = 2^{x+y}$ и докажите, что других нет.

Ответ: $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-3, 4)$.

Критерии

`b` – полное решение с незначительными пробелами в обосновании.

`c` – получены все ответы.

`cd` – полное решение с незначительными пробелами в обосновании и потерей ответа.

`d` – получен хотя бы один ответ в исходной задаче (исключая случаи ошибочного преобразования исходного уравнения).

Решение. Заметим, что $x + y \geqslant 0$, поскольку левая часть уравнения — целое число, а значит, и правая часть уравнения должна быть целым числом. В предположении $y = -x$ получаем равенство $x^2 = 1$, откуда находим решения $(1, -1)$ и $(-1, 1)$. Далее считаем $x + y > 0$.

Рассмотрим два случая: (1) – x делится на 2 в не меньшей степени, чем y, и (2) – в меньшей.

1) В этом случае $x = 2^s u$ и $y = 2^s v$, где s, u и v — целые числа, $s \geqslant 0$, причём v нечётно. Подставляя эти x и y в уравнение, получим:

$$2^{2s}(2u^2 - v^2) = 2^{2^s(u+v)}.$$

Так как левая часть последнего равенства делится на 2^{2s}, но не на 2^{2s+1}, а правая — на $2^{2^s(u+v)}$, но не на $2^{2^s(u+v)+1}$, получаем равенство степеней: $s = 2^{s-1}(u + v)$. Если $u + v = 1$, то $s = 1$ или $s = 2$. Подставляя предположения в выражения для x и y, в обоих случаях получаем уравнение $u^2+2u-2 = 0$, не имеющее целочисленных корней. Если же $u+v > 1$, то $2^{s-1}(u + v) \geqslant 2^s = (1 + 1)^s = 1 + s + \ldots > s$, и равенство не достигается.

2) В этом случае $x = 2^s u$ и $y = 2^{s+1} v$, где s, u и v — целые числа, $s \geqslant 0$, причём u нечётно. Подставляя эти x и y в уравнение, получим:

$$2^{2s+1}(u^2 - 2v^2) = 2^{2^s(u+2v)} \tag{1}$$

Так как левая часть равенства (3) делится на 2^{2s+1}, но не на 2^{2s+2}, а правая — на $2^{2^s(u+2v)}$, но не на $2^{2^s(u+2v)+1}$, получаем равенство степеней: $2s+1 = 2^s(u+2v)$. Так как в нём слева стоит нечётное число, то $s = 0$, и

$$u + 2v = 1$$

Кроме того, из (3) следует, что $u^2 - 2v^2 = 1$. Подставляя сюда $u = 1 - 2v$, находим, что $v = 0$ или $v = 2$. Так как $s = 0$, получаем из формул $x = 2^s(1-2v)$ и $y = 2^{s+1}v$ решения $(1, 0)$ и $(-3, 4)$.

8.5. Сколько существует различных (т. е. не равных друг другу) остроугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 24? Выпишите длины трех сторон всех этих треугольников и докажите, что других не бывает.

Ответ: 6.

Критерии

b – правильный критерий остроугольности и либо правильный список остроугольных треугольников, но без полного обоснования (без обоснования сказано, что критерию удовлетворяют только эти наборы длин, или перебор неполон), либо полный перебор с арифметической ошибкой, приведшей к ошибочному включению или исключению треугольника.

d – правильный критерий остроугольности и либо неправильный список без подробного доказательства или с существенными ошибками в доказательстве, либо отсутствие списка.

* – полный список всех треугольников, а не только остроугольных.

Решение. Заметим, что треугольник со сторонами $a \geqslant b \geqslant c$ тупоуголен, если и только если $a^2 > b^2 + c^2$. Действительно, если ABC – треугольник со сторонами $a \geqslant b \geqslant c$ против вершин A, B и C соответственно, а $AB'C$ – треугольник с прямым углом $\angle A$ и $AB' = AB$, то B и C лежат по разную сторону от прямой AB', иначе бы в треугольнике CBB' было $\angle CBB' > \angle ABB' = \angle AB'B > \angle BB'C$, и $BC = a < B'C = \sqrt{b^2 + c^2}$. Поэтому из $a^2 > b^2 + c^2$ следует, что $\angle CAB > \angle CAB' = 90°$, обратное доказывается аналогично.

Подсчитаем тройки натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $a > b \geqslant c$, $a^2 < b^2 + c^2$, $a < b + c$ и $a + b + c = 24$. Заметим, что $a + (a + b + c) < (b + c) + 24 \Rightarrow a \leqslant 11$, и $a \geqslant (a + b + c)/3 = 8$. Для каждого $a = 8, 9, 10, 11$ нужно подсчитать число пар чисел (b, c), таких что $a \geqslant b \geqslant c$, $b + c = 24 - a$ и $b^2 + c^2 > a^2$.

При $a = 8$ есть одна пара чисел (b, c), таких что $8 \geqslant b \geqslant c$ и $b + c = 16$: это $(8, 8)$, и соответствующий треугольник равносторонний.

При $a = 9$ есть две пары чисел (b, c), таких что $9 \geqslant b \geqslant c$ и $b + c = 15$: это $(8, 7)$ и $(9, 6)$, обе удовлетворяют неравенству $b^2 + c^2 > a^2$.

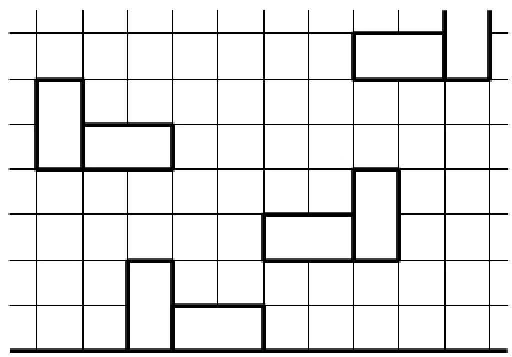
При $a = 10$ есть четыре пары чисел (b, c), таких что $10 \geqslant b \geqslant c$ и $b + c = 14$: это $(7, 7)$, $(8, 6)$, $(9, 5)$ и $(10, 4)$. Из них последние две удовлетворяет неравенству $b^2 + c^2 > a^2$, а первые две – нет.

При $a = 11$ есть пять пар чисел (b, c), таких что $11 \geqslant b \geqslant c$ и $b + c = 13$: это $(7, 6)$, $(8, 5)$, $(9, 4)$, $(10, 3)$ и $(11, 2)$. Из них только последняя удовлетворяет неравенству $b^2 + c^2 > a^2$.

8.6. Верхняя полуплоскость разбита на квадратные клетки (см. рисунок). Костяшка домино занимает две соседние по стороне клетки. Можно ли заполнить некоторые из клеток неперекрывающимися костяшками домино так, чтобы в каждой строке и каждом столбце оказалось заполненным нечетное число клеток? Если можно, то опишите конфигурацию, если нет, то докажите, что нельзя.

Ответ: можно.

Решение. Расположим, например, четыре костяшки, как две нижние пары соприкасающихся костяшек на рисунке. Затем для каждого натурального n добавим пару костяшек, полученную из левой пары сдвигом на $2n$ клеток влево и $4n$ клеток вверх, а также пару костяшек, полученную из правой пары сдвигом на $2n$ клеток вправо и $4n$ клеток вверх. В получившейся конфигурации каждая строка клеток будет пересекать ровно одну вертикальную костяшку (и не более одной горизонтальной), а каждый столбец клеток – ровно одну горизонтальную костяшку (и не более одной вертикальной).



Критерии

c – предложенный способ заполнения костяшками при распространении на всю верхнюю полуплоскость дает не более чем конечное число строк и столбцов, которые пересекают бесконечное число костяшек.

*c – полное решение задачи в неверном предположении, что “полуплоскость” конечна (например, состоит из тех 50 клеток, которые целиком видны на рисунке).

f – предыдущее условие не выполнено при распространении заполнения на всю полуплоскость, но верно при распространении на четверть плоскости.

d – из текста решения неясно, как распространить предложенный способ заполнения на сколь угодно большой конечный кусок полуплоскости.

d – Корректные (не использующие понятия четности сумм бесконечного количества целых чисел и т.д.) попытки доказать невозможность заполнения.

*d – решение задачи в неверном предположении, что “полуплоскость” конечна, и с незначительными пробелами в обосновании.