Олимпиада для студентов и выпускников вузов – 2013 г.

Направление «Прикладная математика и информатика»

Профили:

«Математическое моделирование» Код: 110

«Математические методы естествознания и компьютерные технологии» Код: 111

Время выполнения задания – 180 мин.

Выберите и выполните только один из блоков заданий в соответствии с выбранной вами программой магистерской подготовки.

Блок 1. «Математическое моделирование» Код: 110

Все ответы при решении задач требуется обосновать. Учитываются решения тех 5 задач из 10, по которым достигнуто наибольшее продвижение. Правильное и полное решение каждой из этих задач оценивается в 20 баллов.

1. Сколькими способами из студенческой группы в 20 человек можно выбрать 5 так, чтобы никакие два из выбранных не были бы соседями в алфавитном списке группы?

2. Найдите предел последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n = \left((\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{5})/2)\right)^n.$$

3. Найдите собственные векторы и собственные значения оператора $A(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{x}]]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — некоторые вектора из пространства $\mathbb{R}^3$ (квадратными скобками обозначается, как обычно, векторное произведение). При каких $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ этот оператор будет иметь три линейно независимых собственных вектора?

4. Три избирателя должны выбрать одну из трех альтернатив. Предпочтения каждого из них представляются в виде линейного порядка на множестве из трех альтернатив. Правило принятия решения — относительное большинство, т.е. альтернатива a считается лучше b, если так считает как минимум два человека. Считается, что избиратели договорились, если нашлась альтернатива x, которая лучше каждой из двух оставшихся.

Предположим, что предпочтения избирателей случайны, равновероятны (т.е. вероятности всех линейных порядков равны) и независимы. Найдите вероятность того, что участники договорятся.

5. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6. Квадратная матрица A и ненулевые векторы–столбцы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ удовлетворяют условиям $A\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $A\mathbf{c} = \mathbf{c}$. Известно, кроме того, что ранг матрицы A равен 3. Докажите, что по крайней мере одна из двух систем линейных уравнений с неизвестным вектором $\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$$

и

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$$

не имеет ненулевых решений.

7. Вычислительный кластер состоит из 360 серверов, нормативный срок службы которых 12 месяцев. Сервера иногда совершенно случайно зависают. При первом зависании сервер перезагружают, а при повторном сразу заменяют новым. За год в кластере фиксируется в среднем 120 зависаний.

а) Найдите дисперсию количества зависаний в течение года.

б) Найдите математическое ожидание количества досрочно списанных серверов в течение года.

8. Найдите минимальное и максимальное значения функции $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8, \\ 3x + 5y \leq 17, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

9. Шарообразная амеба объемом V попала в питательный 40%-й раствор глюкозы. Скорость всасывания раствора через единицу поверхности пропорциональна разности концентраций глюкозы снаружи и внутри с коэффициентом $k > 0$. Каких размеров достигнет амеба (или ее разорвет), если считать начальную концентрацию внутри амебы нулевой? Химическими, биологическими и прочими процессами (за исключением всасывания раствора и растяжения) предлагается пренебречь.

10. Неориентированный граф G (без кратных ребер, но, возможно, с петлями) обладает тем свойством, что для некоторого натурального k из каждой вершины в каждую ведет ровно 2013 путей длины k. Можно ли утверждать, что этот граф эйлеров?

Блок 2. «Математические методы естествознания и компьютерные технологии» Код: 111

Решите задачи. Учитываются решения тех 5 задач из 6, по которым достигнуто наибольшее продвижение. Правильное и полное решение каждой из этих задач оценивается в 20 баллов.

1. Пусть n целое число, большее 1, а $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ - все комплексные числа, являющиеся корнями n-ой степени из 1. Чему равна сумма $\varepsilon_1^d+\ldots+\varepsilon_n^d$, где d - ненулевое целое число ?

2. Докажите, что если симметричная 5x5 матрица A подчинена соотношению $A^4=A^3+5A^2+3A$, то хотя бы одно из ее собственных значений вырождено (имеет кратность больше 1).

3. Рассматривается уравнение Ньютона $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-U'(x)$ в поле сил с потенциалом $U(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, где $a<b<c$. Требуется описать все начальные условия, при которых решение этого уравнения не уходит на бесконечность при $t\to\infty$.

4. Каков предел при $t\to\infty$ решения $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u \quad , \qquad 0<x<\pi \ , \quad 0<t \ ,$$

удовлетворяющего краевым условиям Дирихле $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ и начальному условию $u(x,0)=x(\pi-x)$?

5. Найти разложение функции $I(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{3} e^{-(4-x)/\varepsilon}\cdot e^{-x^2}dx$ в асимптотический ряд вида $I(\varepsilon)=f(\varepsilon)\left(a_0+\varepsilon a_1+\varepsilon^2 a_2+\ldots+O(\varepsilon^N)\right)$ при $\varepsilon\to+0$.

6. На сторонах четырехугольника написано по числу. Каждое из этих чисел заменяют на среднее арифметическое его двух соседей; в результате, на сторонах возникает новая четверка чисел. Затем всю процедуру повторяют, и т.д. Какое число получится на каждой стороне четырехугольника в пределе, когда количество итераций стремится к бесконечности?