

Направление «Математические методы анализа экономики»

Профили:

«Экономика»

Код: 220

«Математические методы анализа экономики»

Код: 221

«Статистический анализ экономических и социальных процессов»

Код: 222

Время выполнения задания – 180 мин.

Решите задачи.

1) Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\ln(1 + \arcsin^2 x)}{\operatorname{tg}(\pi x)} \right)^{\frac{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}}{x}}$

2) Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

Ортогонализировать систему собственных векторов этой матрицы и дополнить ее до ортогонального базиса в исходном линейном пространстве.

3) Исследуйте на экстремум следующую функцию: $F(x, y) = 3x^3 + 21y^3 - 18xy + 5$.

4) Пусть $Q(x, y) = 4x^2 - 9y^2$, аргументы $Q(x, y)$ удовлетворяют условию $F(x, y) = c + ax + by = 0$.

При каких значениях параметров 'a, b, c' функция $Q(x, y)$:

- А) будет иметь ровно одну условную стационарную точку, определите, является ли данная точка экстремумом;
- Б) будет иметь более одной условной стационарной точки, определите, являются ли данные точки экстремумами;
- В) не будет иметь стационарных точек.

Указание. Для нахождения условных стационарных точек использовать метод множителей Лагранжа. Дополнительные исследований проводить не надо.

5) Решите дифференциальное уравнение $y'''(x) - 3y''(x) + y'(x) - 3y(x) + 6x + 13 + 5e^{2x} = 0$.

6) На курсе учатся две группы.

В первой группе – 20 юношей и 10 девушек.

Во второй группе – 15 юношей и 15 девушек.

Мы выбираем одного юношу из всего курса равновероятно наугад. Затем из группы, в которой учится этот юноша, выбираем наугад равновероятно еще одного человека, кроме этого юноши.

- А) Какова вероятность того, что будут выбраны люди из первой группы?
- Б) Какова вероятность того, что оба выбранных человека будут юношами?
- В) Какова вероятность того, что оба - юноши, если известно, что они из первой группы?
- Д) Какова вероятность того, что оба из первой группы, если известно, что это юноши?

7) Совместная функция плотности случайных величин X и Y имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + 4xy)/34, & \{1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- А) Найдите вероятности $P(Y \leq 2)$ и $P(X \leq 1.5 | Y \leq 2)$.
- Б) Найдите $E(X)$ и $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

Олимпиада для студентов и выпускников вузов – 2013 г.

8) Производитель одежды хочет узнать, какой цвет футболок предпочитает целевая группа: малиновый или салатный. В выборке из 225 человек 90 высказались в пользу малинового цвета, а 135 – в пользу салатного.

- А) Рассчитайте 95% доверительный интервал для доли предпочитающих салатный цвет.
- Б) Строгий начальник хочет, чтобы ширина доверительного интервала (разница между его верхней и нижней границей) была не больше 0.1. Какой доверительной вероятности можно добиться в таком случае?

9) При отлаженном процессе упаковки чая в одну упаковку в среднем помещается 125 граммов чая, при этом дисперсия массы чая в упаковке не должна превышать 9 (граммов в квадрате). Отдел контроля качества отобрал 25 упаковок и рассчитал несмещённую

$$\text{оценку дисперсии } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 13.5.$$

Предполагается, что масса чая в упаковке имеет нормальное распределение.

- А) Есть ли основания считать, что дисперсия массы чая превышает допустимый предел? Используйте уровень значимости 1%.
- Б) Гипотезу о равенстве средней массы 125 граммам решено проверять против двусторонней альтернативы с помощью следующего критерия: гипотеза о равенстве не отвергается, если средняя масса чая в выборке лежит в пределах [123.452; 126.548]. В противном случае основная гипотеза отвергается, процесс упаковки останавливается для переналадки.

Предположим, что настоящая дисперсия массы чая в упаковке равна 9. С какой вероятностью хорошо отлаженный процесс упаковки будет остановлен для переналадки (иначе говоря, произойдёт ошибка первого рода)?

10) Директору по персоналу П. Друкеру доступны некоторые данные о семидесяти одном работнике на рынке труда (Таблица 1).

Таблица 1.

Доступные данные

Данные	Переменная	Комментарии
Годовой заработок	salary	\$, непрерывная шкала измерений
Опыт работы	experience	годы, непрерывная шкала измерений
Пол	gender	фиктивная (dummy) переменная, женский пол кодируется единицей
Наличие квалификации уровня	level1	фиктивная (dummy) переменная, первый, самый низкий уровень квалификации, наличие кодируется единицей.
	level2	фиктивная (dummy) переменная, средний уровень квалификации, наличие кодируется единицей.
	level3	фиктивная (dummy) переменная, высокий уровень квалификации, наличие кодируется единицей.

Во-первых, он хочет узнать, существует ли на рынке гендерная дискриминация, чтобы оптимизировать издержки по найму нового персонала женского пола.

Напомним, что гендерная дискриминация на рынке труда означает наличие неравных возможностей, в частности, в области оплаты труда у сотрудников разного пола, обладающих одинаковыми характеристиками в остальном.

а) Какое из уравнений А – Г в наибольшей степени подходит для решения этой задачи Друкера?

б) Каким образом Друкер получил ответ на свой вопрос, если он верит, что случайная составляющая в наилучшей модели имеет нормальное распределение?

А) $salary_t = a_0 + a_1 experience_t + a_2 (experience_t)^2 + a_3 gender_t + v_t$

Б) $salary_t = a_0 + a_1 experience_t + a_2 gender_t + v_t$

В) $salary_t = a_0 + a_1 experience_t + a_2 experience_t gender_t + a_3 gender_t + v_t$

Г) $salary_t = a_0 + a_1 experience_t + a_2 experience_t gender_t + v_t$

Во-вторых, Друкер хочет узнать, в каких пределах должна находиться справедливая (рыночная) прибавка к годовому заработку женщин, достигших третьего уровня квалификации, по отношению к заработной плате женщин первого уровня квалификации, чтобы удержать их в компании и не переплатить им.

Для решения задачи Друкер построил следующую модель:

$$salary_t = c(1) + c(2)level2_t + c(3)level3_t + c(4)gender_t + c(5)gender_t level2_t + c(6)gender_t level3_t + v_t$$

Друкер верит, что распределение случайной составляющей в модели нормальное. Решение задачи он хочет представить в виде 95% доверительного интервала.

Результаты МНК оценивания значений коэффициентов приведены в Таблице 2.

Таблица 2.

МНК оценки коэффициентов модели

Переменная	МНК оценка	Стандартная ошибка оценки
C	45989,2	1480,0
level2	6951,6	2750,7
level3	8250,2	3744,1
gender	-17197,8	2750,7
gender*level2	8791,1	4182,3
gender*level3	16494,7	5846,3

В Таблице 3 приведены оценки значений коэффициентов ковариации полученных оценок.

Таблица 3.

Оценки коэффициентов ковариации МНК оценок коэффициентов модели.

	C	level2	level3	gender	gender*level2	gender*level3
C	2190307,0	-2190307,0	-2190307,0	-2190307,0	2190307,0	2190307,0
level2	-2190307,0	7566515,0	2190307,0	2190307,0	-7566515,0	-2190307,0
level3	-2190307,0	2190307,0	14017966,0	2190307,0	-2190307,0	-14017966,0
gender	-2190307,0	2190307,0	2190307,0	7566515,0	-7566515,0	-7566515,0
gender*level2	2190307,0	-7566515,0	-2190307,0	-7566515,0	17491823,0	7566515,0
gender*level3	2190307,0	-2190307,0	-14017966,0	-7566515,0	7566515,0	34178747,0

а) Почему Друкер использовал в модели только два уровня квалификации?

б) Помогите Друкеру найти интересующие его границы надбавки.