Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2013 г.
по направлению «Математика»

Профили:
«Математика»
«Математическая физика»

Критерии оценок и решения

Критерии оценок по всем задачам

Каждая задача оценивалась из 20 баллов. Ставились следующие оценки.

$+$ (20 баллов) — правильное решение с полным и строгим обоснованием.

$\overset{+}{\cdot}$ (18 баллов) — правильное решение с мелкой арифметической ошибкой в ответе или с мелким недочетом, не влияющим на дальнейший ход решения.

$\pm$ (15 баллов) — правильное решение с обоснованием, содержащим легко устранимые недочеты.

$+/2$ (10 баллов) — найдено существенное продвижение в решении, но получен неверный ответ или решение не доведено до ответа, поскольку часть рассуждений основывается на технической ошибке.

$\mp$ (7 баллов) — продвижение в решении задачи, не доведенное до конца.

$\overset{-}{\cdot}$ (2 балла) — нет существенного продвижения в решении, но работа демонстрирует понимание предметной области, необходимых для правильного решения понятий и методов.

$-$ (0 баллов) — записанные рассуждения не помогают в решении задачи.

0 (0 баллов) — задача не записана в чистовике, и нет разборчивых рассуждений в черновике.

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

1. Напомним, что *инверсией* перестановки $\sigma \in S_n$ называется пара (i, j), i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, такая, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Найдите суммарное число инверсий у всех перестановок из S_n, т.е. сумму
$$\sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma),$$
где $i(\sigma)$ — число инверсий перестановки σ.

1. Recall that an *inversion* of a permutation $\sigma \in S_n$ is by definition a pair (i, j), i, $j \in \{1, \ldots, n\}$ such that $i < j$ but $\sigma(i) > \sigma(j)$. Find the total number of inversions of all permutations in S_n, i.e. the sum
$$\sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma),$$
where $i(\sigma)$ is the number of inversions in the permutation σ.

Solution 1. We need to compute the number of triplies (i, j, σ), where $\sigma \in S_n$ and (i, j) is an inversion of σ. The numbers i and j can be chosen in $\binom{n}{2}$ ways. Having i and j fixed, we can choose the values $\sigma(i)$ and $\sigma(j)$ in $\binom{n}{2}$ ways. Finally, if i, j, $\sigma(i)$, $\sigma(j)$ are fixed, then there are $(n-2)!$ ways to asign the values $\sigma(k)$ to all $k \neq i$, j. Thus we have
$$\sum_{\sigma \in S_n} i(\sigma) = \binom{n}{2}^2 (n-2)!.$$

2. Пусть A — линейный оператор на конечномерном комплексном векторном пространстве V, такой, что $A^{2013} = E$, где E — единичный оператор. Докажите, что оператор A диагонализуем.

2. Let A be a linear operator on a finite dimensional complex vector space V such that $A^{2013} = E$, where E is the identity operator. Prove that the operator A is diagonalizable.

Solution 2. By the Jordan decomposition theorem, there exists a basis of the space V, in which the matrix of A has the Jordan form $D + N$, where D is the diagonal part, and $N = A - D$ is the nilpotent part. Note that $DN = ND$ and that $N^n = 0$, where n is the dimension of V. We have $A^m = D^m + mD^{m-1}N + \dots$. For arbitrarily large m, the matrix A^m remains bounded. Therefore, $D^{m-1}N = 0$. Since all eigenvalues of D have modulus one, D is invertible, hence $N = 0$.

3. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел. Верно ли, что пространство $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ гомеоморфно пространству $\mathbb{Q}$? Строго обоснуйте ответ.

3. Let $\mathbb{Q}$ be the set of all rational numbers. Is it true that the space $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ is homeomorphic to the space $\mathbb{Q}$? Rigorously justify your answer.

Solution 3. Note that, since open intervals form a basis of topology in $\mathbb{Q}$, every order-preserving bijection between subsets of $\mathbb{Q}$ is a homeomorphism. We can define an order-preserving bijection f between $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ and $\mathbb{Q}$ as follows. Let p_n, $n \geq 1$, be a strictly increasing sequence of rational numbers converging to $\sqrt{2}$, and q_n, $n \geq 1$ be a strictly decreasing sequence of rational numbers converging to $\sqrt{2}$. Set $p_0 = -\infty$ and $q_0 = \infty$. On $[-1/n, -1/(n+1)]$, $n \geq 0$, we set f to be the unique affine map taking $-1/n$ to p_n and $-1/(n+1)$ to p_{n+1}. Clearly, this affine map takes rational points to rational points. Similarly, on $[1/(n+1), 1/n]$, $n \geq 0$, we set f to be the unique affine map taking $1/(n+1)$ to q_{n+1} and $1/n$ to q_n.

4. Докажите следующее неравенство

$$\int_0^{2\pi} \exp(2\sqrt{t}\cos\phi)\, d\phi < 2\pi e^t$$

для всех $t > 0$.

4. Prove the following inequality:

$$\int_0^{2\pi} \exp(2\sqrt{t}\cos\phi)\, d\phi < 2\pi e^t$$

for all $t > 0$.

Solution 4. The integral I in the left-hand side can be expressed as a series. Although this can be done without referring to complex numbers, it is easier to note that if $z = e^{i\phi}$, then $2\cos\phi = z + z^{-1}$, and $d\phi = -idz/z$. Thus $\frac{1}{2\pi} I$ is equal to the residue of $\exp(t(z + z^{-1}))dz/z$ at 0, i.e. to the free term in the Laurent expansion of $\exp(t(z + z^{-1}))$. The latter is equal to

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните <u>только один</u> из следующих блоков заданий специальной части.

Блок 1. «Математика»

1. Пусть $y_t(x)$ — решение дифференциального уравнения $y' = y(1 + ye^{-x^2-y^2})$, удовлетворяющее начальному условию $y_t(0) = t$. Докажите, что $y_t(1)$ определено при всех t, и найдите $\frac{d}{dt}y_t(1)$ при $t = 0$.

1. Let $y_t(x)$ be the solution of the differential equation $y' = y(1 + ye^{-x^2-y^2})$ satisfying the initial condition $y_t(0) = t$. Prove that $y_t(1)$ is defined for all t, and find $\frac{d}{dt}y_t(1)$ at $t = 0$.

Solution 5. Let us first prove that $y_t(x)$ is defined for all $x > 0$. By the Extension Theorem, the only possible obstruction is a solution $y_t(x)$ defined in $[0, x_0)$ such that $y_t(x_0 - 0) = \infty$ for some x_0. It follows that $y_t'/|y_t|$ is unbounded near x_0, a contradiction.

Note that $y_0(x) = 0$. Set $z(x) = \frac{d}{dt}y_t(x)$ at $t = 0$. Differentiating the equation on y by t at $t = 0$, we obtain that $z' = z$. Differentiating the initial condition, we obtain that $z(0) = 1$. It follows that $z(x) = e^x$ and that $z(1) = e$.

2. Найдите число всех нормальных подгрупп в группе всех симметрий правильного восьмиугольника (включая саму группу и тривиальную подгруппу). Строго обоснуйте ответ.

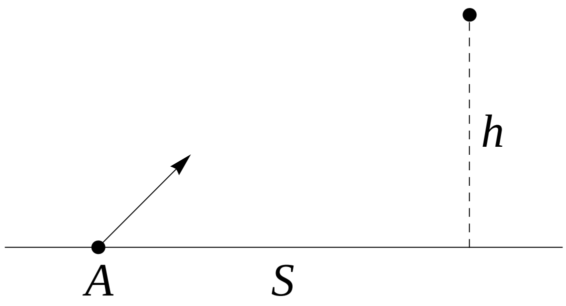
2. Find the number of all normal subgroups in the group of all symmetries of a regular 8-gon (including the group itself and its trivial subgroup). Rigorously justify your answer.

Solution 6. Let D_8 denote the group under consideration, and H a normal subgroup of D_8 that is different from D_8 and from $\{id\}$. Let $C_8 \subset D_8$ be the subgroup of all rotations in D_8. Suppose first that H is not contained in C_8. Then H contains some reflection. There are two conjugacy classes of reflections, hence H must contain at least one of these conjugacy classes (one conjugacy class consists of reflections in lines connecting opposite vertices, and the other conjugacy class consists of reflections in lines connecting midpoints of opposite edges). Each conjugacy class of reflections generates a subgroup of D_8 isomorphic to D_4 (the symmetry group of a square). Hence H must contain at least one of these two D_4-subgroups. Since these two subgroups have index 2, the group H must coincide with one of them. Suppose now that $H \subset C_8$. Then $H = C_8$ or C_4 or $C_2 = \{\pm id\}$. All these subgroups are normal. Thus there are 7 normal subgroups of D_8.

Блок 2. «Математическая физика»

1. Из точки A бросают камень в сторону цели, которая находится на расстоянии S по горизонтали и h по вертикали от точки A. Найдите минимальную величину начальной скорости камня, при которой можно попасть в цель. Сила тяжести направлена вертикально вниз.

1. A stone is shot from a point A towards a target that is at horizontal distance S and vertical distance h from the point A. Find the minimal value of the initial speed of the stone, with which the stone can hit the target. The force of gravity is directed vertically downwards.



Решение:

Допустим вначале, что начальная скорость камня v_0 достаточна для попадания в цель и найдем, под каким углом α следует его бросать. Для этого запишем уравнение, выражающее факт прохождения траектории через цель (высота траектории h в момент, когда горизонтальная координата равна s):

$$h = s\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2}\,(1+\mathrm{tg}^2\alpha).$$

Это выражение можно переписать в виде квадратного уравнения на тангенс угла бросания α

$$\mathrm{tg}^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gs}\,\mathrm{tg}\alpha + 1 + \frac{2hv_0^2}{gs^2} = 0,$$

дискирминант D которого должен быть неотрицательным, чтобы нужная траектория существовала:

$$D = \frac{4v_0^4}{g^2s^2} - 4\left(1 + \frac{2hv_0^2}{gs^2}\right) \geq 0.$$

Если $D > 0$, то есть 2 решения (2 траектории достижения цели), эти траектории сливаются в одну при $D = 0$, а при $D < 0$ в цель с данной начальной скоростью v_0 попасть невозможно. Следовательно, минимальная допустимая начальная скорость v_0 находится из условия $D = 0$:

$$v_0^4 - 2gh\,v_0^2 - g^2s^2 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное положительное решение

$$v_0^2 = g(h + \sqrt{h^2+s^2}\,),$$

которое и является ответом к задаче.

2. В плоскости xOy может без трения двигаться материальная точка массы m и заряда q. На материальную точку действует потенциальная сила с потенциальной энергией $U(x,y) = m\omega_0^2(x^2+y^2)/2$ (двумерный гармонический осциллятор). Найдите общее решение уравнений движения осциллятора в случае, когда он помещен в постоянное и однородное магнитное поле, направленное вдоль оси Oz: $\vec{H} = (0,0,H)$.

2. A material point of mass m and of electric charge q can move in the plane xOy without friction. The point m is under the action of a potential force with the potential energy $U(x,y) = m\omega_0^2(x^2+y^2)/2$ (a two dimensional harmonic oscillator). Solve the equations of motion for the oscillator in the case when there is a constant homogeneous magnetic field directed along the Oz axis: $\vec{H} = (0,0,H)$.

Решение:

Материальная точка будет двигаться в плоскости xOy под действием центральной силы (силы упругости) $\vec{F}_1 = -\mathrm{grad}\,U$ и силы Лоренца $\vec{F}_2 = q(\vec{v}\times\vec{H})/c$ (c — скорость света), перпендикулярной скорости материальной точки $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ и магнитному полю $\vec{H}$.

В декартовых координатах x и y система динамических уравнений точки m записывается в виде:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2\,x + \frac{qH}{c}\,\frac{dy}{dt}$$
$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega_0^2\,y - \frac{qH}{c}\,\frac{dx}{dt}.$$

Введем обозначение $\Omega = \frac{qH}{mc}$ и образуем линейную комбинацию $\xi = x + iy$. Тогда для ξ получаем следующее линейное уравнение с постоянными коэффициенатами:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + i\Omega\,\frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2\xi = 0.$$

Подстановкой $\xi = Ce^{-i\omega t}$ находим собственные частоты:

$$\omega_\pm = \frac{1}{2}\left(\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + 4\omega_0^2}\right).$$

Общее решение для ξ есть линейная комбинация двух фундаментальных решений с ω_+ и ω_-, а x и y выражаются через вещественную и мнимую части ξ. Общее решение может быть записано, например, в таком виде:

$$x(t) = A\cos(\omega_+ t + \phi_+) + B\sin(\omega_- t + \phi_-), \qquad y(t) = -A\sin(\omega_+ t + \phi_+) - B\cos(\omega_- t + \phi_-).$$

Четыре произвольных вещественных константы A, B и $\phi_\pm$ фиксируются начальными условиями (положение и скорость материальной точки в момент $t = 0$).