# Критерии оценки

## Направление «Прикладная математика и информатика»

### Профиль: «Математическое моделирование»

**Время выполнения заданий 3 часа.**

*При оценке учитывались решения тех 5 задач из 10, по которым было достигнуто наибольшее продвижение. Правильное и полное решение каждой из этих задач оценивается в 20 баллов.*

*При оценке каждой задачи наводящие соображения и приведенные полезные математические факты оценивались в 1 или 2 балла, правильное решение с незначительными арифметическими ошибками или описками – в 18 или 19 баллов. Подробные критерии оценки по каждой задаче приведены ниже.*

**1.** Сколькими способами из студенческой группы в 20 человек можно выбрать 5 так, чтобы никакие два из выбранных не были бы соседями в алфавитном списке группы?

*Решение.* Ясно, что важно лишь то, в каком порядке следуют друг за другом 5 выбранных и 15 невыбранных строк в списке. Рассмотрим 15 невыбранных. Надо между ними вставить 5 выбранных так, чтобы 2 выбранных не стояли рядом. Мест для этого 16: до первого, между 1 и 2, ... , после 15. Из этих 16 мест нужно выбрать 5, в которые вставим выбранных людей. Таким образом, ответ равен $C_{16}^5$.

*Другое решение.* Пусть $x_1, \ldots, x_5$ — номера выбранных студентов (в алфавитном списке). Тогда рассмотрим следующие числа $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$, $\ldots$, $y_5 = x_5 - x_4$, $y_6 = 22 - x_5$. Здесь $y_1 \geq 1$ и $y_i \geq 2$ при $i = 2, \ldots, 6$, а сумма этих чисел равна 22. Если обозначить $z_1 = y_1$ и $z_i = y_i - 1 \geq 1$ при $i = 2, \ldots, 6$, то получаем, что необходимо найти число натуральных решений уравнения

$$z_1 + \ldots + z_6 = 17.$$

Как известно, это число равно $C_{16}^5$.

*Критерии оценки.* Использование символа $C_m^n$ с неверными знаечниями $m$ и $n$: 1 балл.

**2.** Найдите предел последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n = \Big( (\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{5})/2 \Big)^n.$$

*Решение.* Имеем

$$\sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5} = \left( \sqrt[2n]{3 \cdot 5} \right)^n \leqslant \left( \frac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{5}}{2} \right)^n = 3 \cdot \left( \frac{1 + \sqrt[n]{5/3}}{2} \right)^n =$$

$$= 3 \cdot \left( 1 + \frac{\sqrt[n]{5/3} - 1}{2} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{5/3}-1} \cdot \frac{n \cdot (\sqrt[n]{5/3}-1)}{2}} < \ 3 \cdot e^{\frac{n \cdot \left( \sqrt[n]{5/3}-1 \right)}{2}} \to 3 \cdot e^{\frac{\ln{(5/3)}}{2}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{15}.$$

По теореме о двух милиционерах, получаем, что искомый предел равен $\sqrt{15}$.

В решении использовано неравенство $\left( 1 + \frac{\sqrt[n]{5/3} - 1}{2} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{5/3}-1}} < e$, получаемое из монотонности функции $(1+x)^{1/x}$, а также один из замечательных пределов:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{5/3} - 1}{1/n} = \ln{(5/3)}.$$

*Критерии оценки.* Верное начало решения с ошибкой в формуле для предела для $e^x$: 7 баллов.

Верный ответ ($\sqrt{15}$) и доказанной неравенство "ответ $\geq \sqrt{15}$": 10 баллов.

Ошибка в дифференцировании в правиле Лопиталя: 7 баллов.

**3.** Найдите собственные векторы и собственные значения оператора $A(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{x}]]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — некоторые вектора из пространства $\mathbb{R}^3$ (квадратными скобками обозначается, как обычно, векторное произведение). При каких $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ этот оператор будет иметь три линейно независимых собственных вектора?

*Решение.*

Предположим, что $\mathbf{x}$ — собственный вектор данного оператора, соответствующий собственному значению $\lambda$. Так как $\lambda\mathbf{x} = A(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{x}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) - \mathbf{x}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, получаем

$$(\lambda + (\mathbf{a}, \mathbf{b}))\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{x}).$$

Тогда либо векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ параллельны, либо обе части последнего равенства нулевые. В первом случае получаем одномерное пространство

$$l = \{\mathbf{x} = t\mathbf{b} | t \in \mathbb{R}\},$$

состоящее из собственных векторов оператора $A$ с собственным значением $\lambda_1 = 0$ (т.к. $A(t\mathbf{b}) = t[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{b}]] = 0$) и нулевого вектора. Во втором случае получаем, что вектор $\mathbf{x}$ и число $\lambda$ должны удовлетворять условиям $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ и $\lambda + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$: все такие векторы $\mathbf{x}$ составляют двумерное собственное подпространство

$$L = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \perp \mathbf{a}\},$$

отвечающее собственному значению $\lambda_2 = -(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Больше собственных векторов у нашего оператора нет.

Если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $\lambda_2 = 0 = \lambda_1$, т.е. $l \subset L$, и у оператора $A$ найдется не более двух линейно независимых собственных векторов. Если же это не так, т.е. если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, то найдется три таких вектора: один в $l$ и два в $L$.

*Критерии оценки.* Указано собственное значение $\lambda = 0$ и получено уравнение для остальных собственных значений: 7 баллов.

Пропущено собственное значение $\lambda = 0$: 18 баллов.

**4.** Три избирателя должны выбрать одну из трех альтернатив. Предпочтения каждого из них представляются в виде линейного порядка на множестве из трех альтернатив. Правило принятия решения — относительное большинство, т.е. альтернатива $a$ считается лучше $b$, если так считает как минимум два человека. Считается, что избиратели договорились, если нашлась альтернатива $x$, которая лучше каждой из двух оставшихся.

Предположим, что предпочтения избирателей случайны, равновероятны (т.е. вероятности всех линейных порядков равны) и независимы. Найдите вероятность того, что участники договорятся.

*Решение.* Проще посчитать вероятность того, что избиратели не договорятся. Это возможно только если в коллективном решении получился цикл $a > b > c > a$. Для этого предпочтения избирателя 1 могут быть любыми (например, $a > b > c$), но предпочтения второго должны быть циклической перестановкой предпочтений первого, т.е. только 2 варианта. Предпочтения 3-го в этом случае задаются однозначно. Итак, ответ:

$$1 - \frac{3! \cdot 2}{3!3!3!} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$

*Критерии оценки.* Вычислено число линейных порядков: 1 балл.

Указано, что договорятся, когда наилучшие альтернативы совпадут у всех избирателей: 2 балла.

Расчеты числа вариантов, дающих такое совпадение: 5 баллов.

Доказано, что избиратели не договорятся, если мажоритарный граф циклический: 10 баллов.

**5.** Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\,\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Решение.* Обозначим через $f(x) = \dfrac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}$. Легко видеть, что выполняется равенство

$$f(x) = f(\pi - x).$$

Производя соответствующие замены переменной в подынтегральных выражениях, получаем:

$$\int\limits_0^{\pi} x\cdot f(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} x\cdot f(x)\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} x\cdot f(x)\,dx = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \big((\pi - x) + x\big)\cdot f(x)\,dx = \pi \int\limits_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \pi \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4} f(x)\,dx + \pi \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} f(x)\,dx = \pi \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} \left( f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + f(x) \right)\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

*Критерии оценки.* Интеграл вычислен лишь для нескольких значений $n$: 5 баллов.

Интервал интегрирования разбит посередине на два, интеграл разбит на соответствующие слагаемые: 5 баллов.

**6.** Квадратная матрица $A$ и ненулевые векторы–столбцы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ удовлетворяют условиям $A\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $A\mathbf{c} = \mathbf{c}$. Известно, кроме того, что ранг матрицы $A$ равен 3. Докажите, что по крайней мере одна из двух систем линейных уравнений с неизвестным вектором $\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$$

и

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$$

не имеет ненулевых решений.

*Решение.* Заметим, что вектор $\mathbf{c}$ — собственный с собственным значением $\lambda = 1$, а вектор $\mathbf{b}$ — присоединенный к нему (т.е. он является корневым вектором высоты 1 с тем же собственным значением). Предположим, что существует ненулевой вектор $\mathbf{x_0}$, удовлеворяющий условию

$$A\mathbf{x_0} = \mathbf{b} + \mathbf{x_0}.$$

Тогда $\mathbf{x_0}$ — корневой вектор, присоединенный к $\mathbf{b}$, т.е. корневой вектор высоты 2 с собственным значением 1. Существование таких векторов означает, что жорданова форма матрицы $A$ содержит клетку не менее чем третьего порядка с собственным значением 1. Поскольку $\operatorname{rk} A = 3$, все остальные жордановы клетки в этой форме нулевые. Поэтому у матрицы $A$ нет собственных значений, кроме 1 и 0. В частности, число 2 не является ее собственным значением, поэтому уравнение

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$$

не имеет ненулевых решений.

*Критерии оценки.* Замечено, что $\mathbf{c}$ и/или $\mathbf{x}$ из второй системы — собственные вектора: 1 балл.

Доказано, что один и тот же ненулевой вектор $\mathbf{x}$ не может быть решением обеих систем: 1 балл.

**7.** Вычислительный кластер состоит из 360 серверов, нормативный срок службы которых 12 месяцев. Сервера иногда совершенно случайно зависают. При первом зависании сервер перезагружают, а при повторном сразу заменяют новым. За год в кластере фиксируется в среднем 120 зависаний.

а) Найдите дисперсию количества зависаний в течение года.

б) Найдите математическое ожидание количества досрочно списанных серверов в течение года.

*Решение.* Процесс зависаний сервера пуассоновский (т.е. простейший — ординарный, стационарный, независимый). Сумма пуассоновских потоков — пуассоновский поток, откуда процесс зависаний в суперкомпьютере тоже пуассоновский. Пуассоновская случайная величина имеет распределение

$$P_n = \frac{A^n}{n!} e^{-A},$$

где $A$ — среднее количество событий за единицу времени. Для кластера за год $A = 120$. Для пуассоновской случайной величины дисперсия равна среднему значению, т.е. $D = 120$.

Б) Рассмотрим Пуассоновский процесс зависаний на одном сервере. Тут $A = 1/3$. Среднее количество списаний с одной серверной полки за год равно

$$M_0 = 1 \cdot \left(\frac{A^2}{2!}e^{-A} + \frac{A^3}{3!}e^{-A}\right) + 2 \cdot \left(\frac{A^4}{4!}e^{-A} + \frac{A^5}{5!}e^{-A}\right) + \dots$$

(при 2 и 3 зависаниях — один списанный сервер, при 4 и 5 — два и т.д.). Получаем

$$M_0 = e^{-A}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \frac{e^{-A}}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nA^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nA^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$$

$$= \frac{e^{-A}}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kA^{k+1}}{k!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \frac{e^{-A}}{2}\left(A(e^A - 1) - (\operatorname{sh} A - A)\right) = \left(A - e^{-A}\operatorname{sh} A\right)/2,$$

где $\operatorname{sh} A = (e^A - e^{-A})/2$ — гиперболический синус. Общее количество списаний равно

$$M = M_0 \cdot 360 = 360(1/3 - (1/2)(1 - e^{-2/3}))/2 \approx 16.2,$$

то есть примерно 16 серверов списано досрочно.

*Критерии оценки.* А, полное решение: 7 баллов.

Б, полное решение: 13 баллов.

Указана вероятность (1/3) зависания одного сервера в течение года: 1 балл.

Указано, что это распределение Пуассона: 3 балла. Вычислен его параметр: 4 балла.

**8.** Найдите минимальное и максимальное значения функции $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x + 2y \le 8, \\ 3x + 5y \le 17, \\ x, y \ge 0. \end{cases}$$

*Решение.* Поскольку функция неотрицательная, ее минимальное значение в данной области есть $f(0,0) = 0$. Поскольку и функция, область выпуклы, то максимальное значение достигается на границе области. Эта граница представляет собой объединение прямых отрезков. Ввиду выпуклости, максимум функции $f$ на каждом из отрезков достигается в одном из его концов. Поэтому максимум функции по всей области достигается в вершинах ограничивающего ее многоугольника. Поскольку отрезок прямой $3x + 5y = 17$, заключенный в первом квадранте, проходит ниже прямой $x+2y = 8$ (это можно проверить, вычислив точки пересения с осями), эта область представляет собой треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, 17/5)$ и $(17/3, 0)$. Значит, искомое максимальное значение функции равно

$$\max\{f(0, 0), f(0, 17/5), f(17/3, 0)\} = f(17/3, 0) = 578/9 \approx 64.2.$$

*Другое решение* этой задачи основывается на теореме Куна–Таккера.

*Критерии оценки.* Показано, что область — треугольник: 1 балл.

Показано, что минимум равен нулю: 2 балла.

Сделан перебор вершин без обоснования, что этого достаточно: 5 баллов; обосновано при этом, что минимум равен 0: 7 баллов.

Показано, что функция монотонно возрастает по обеим переменным и что ее экстремум достигается на границе области: 10 баллов.

**9.** Шарообразная амеба объемом $V$ попала в питательный 40%-й раствор глюкозы. Скорость всасывания раствора через единицу поверхности пропорциональна разности концентраций глюкозы снаружи и внутри с коэффициентом $k > 0$. Каких размеров достигнет амеба (или ее разорвет), если считать начальную концентрацию внутри амебы нулевой? Химическими, биологическими и прочими процессами (за исключением всасывания раствора и растяжения) предлагается пренебречь.

*Решение.* Пусть $v(t)$ — объем амебы в момент времени $t$, так что $v(0) = V$. Тогда разность концентраций снаружи и внутри равна

$$40\% - \frac{(v(t) - V) \cdot 40\%}{v(t)} = \frac{V \cdot 40\%}{v(t)}.$$

По формулам объема и площади поверхности шара, имеем

$$v(t) = (4/3)\pi R^3 \text{ и } S = 4\pi R^2,$$

откуда

$$S = \sqrt[3]{36\pi} v(t)^{2/3}.$$

Тогда из условия задачи получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = k\sqrt[3]{36\pi} v(t)^{2/3} \cdot \frac{0.4V}{v(t)},$$

или

$$\dot{v} = Cv^{-1/3},$$

где $C = 0.4\sqrt[3]{36\pi}kV$. Решая это уравнение, получаем

$$v(t) = \left((4/3)Ct + C_0\right)^{3/4},$$

где из начального условия $v(0) = V$ получаем $C_0 = V^{4/3}$. В частности,

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = +\infty,$$

так что амебу разорвет.

*Общие криетрии не применялись.*

**10.** Неориентированный граф $G$ (без кратных ребер, но, возможно, с петлями) обладает тем свойством, что для некоторого натурального $k$ из каждой вершины в каждую ведет ровно 2013 путей длины $k$. Можно ли утверждать, что этот граф эйлеров?

*Решение.* Пусть $A$ — матрица инцидентности графа $G$ (т.е. квадратная матрица порядка $n$, равного количеству вершин графа такая, что ее элемент $a_{ij}$ равен количеству ребер с концами в $i$-й и $j$-й вершинах). Тогда количество путей длины $k$ из $i$-й вершины в $j$-ю равно, как известно, элементу с кооординатами $(i, j)$ в матрице $A^k$, т.е.

$$A^k = 2013 \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

В частности, ранг матрицы $A^k$ равен 1. Так как граф $G$ неориентированный, его матрица инцидентности $A$ симметрическая, поэтому

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^k = 1.$$

Так как матрица $A$ состоит из нулей и единиц, данное условие на ранг обозначает, что все ненулевые строки матрицы $A$ одинаковые. Так как граф связный, то нулевых строк и столбцов в этой матрице нет, поэтому

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $G$ — полный граф порядка $n$ с однократными петлями в каждой вершине. Тогда число путей длины $k$ из $i$-й вершины в $j$-ю равно $n^{k-1}$. Имеем $n^{k-1} = 2013$, так что $n$ нечетно (точнее, $n = 2013$ и $k = 2$). Поэтому каждая вершина имеет четную степень (а именно, 2014), и граф эйлеров.

*Критерии оценки.* Указан критерий существования эйлерова цикла: 2 балла.

Указано, что количество путей длины $k$ из $i$-й вершины в $j$-ю равно элементу с кооординатами $(i, j)$ в матрице $A^k$: 5 баллов.