Олимпиада для студентов и выпускников вузов – 2013 г.

Профиль «Экономика»

Условия заданий и критерии оценивания

Памятка по подготовке заявления о проведении апелляции

1. Перед тем, как писать апелляцию внимательно изучите решение задачи и схему оценивания, приведенные ниже.

2. Единственным основанием для подачи апелляции является несоответствие Вашей оценки за задачу (раздел задачи) представленной схеме оценивания.

3. При каких обоснованиях Ваше заявление на апелляцию, вероятно, будет отклонено:

- Вас не устраивает полученная оценка;
- Вы считаете, что критерии оценки являются несправедливыми;
- Вы считаете, что задача сформулирована некорректно, поэтому ничего не решили (даже если задача действительно сформулировано некорректно, Вам нужно найти наилучшее решение для этой задачи);
- Вы считаете, что проверяющий снял слишком много баллов за допущенные ошибки;
- Вы считаете, что в условии задачи не были оговорены какие-то общепринятые условия, например, не сказано «при прочих равных», «все рынки находятся в равновесии», и т.д.

4. Что должно быть указано в апелляции?
В обосновании должно быть указано конкретное место в Вашем решении, где на Ваш взгляд допущено расхождение со схемой оценивания.

Пример содержательной части заявления на апелляцию

Прошу перепроверить раздел 3с задачи 4.
В критериях оценки в п. 3.1 указано, что за расчет темпов роста экономики до шока ставится 2 балла, а в п. 3.6 указано, что за расчет темпов роста экономике в долгосрочном периоде после шока ставится 1 балл. Я указал, что «до шока и в долгосрочном периоде после шока темпы экономического роста составят 4% в год», за что должен был получить в сумме 3 балла, а получил только 2.

Микроэкономика

Задание 1. (20 баллов) Рассмотрим экономику обмена с двумя потребителями (A и B) и N товарами. Предпочтения индивида A заданы функцией полезности вида $u^A\left(x_1^A,\ldots,x_N^A\right)=\min\{x_1^A,,\ldots,x_N^A\}$. Предпочтения индивида B заданы функцией полезности $u^B\left(x_1^B,\ldots,x_N^B\right)=x_1^B\times\ldots\times x_N^B$. В экономике имеется по 10 единиц каждого товара.

(а) Пусть первоначальные запасы индивида B включают положительное количество каждого товара. Покажите, что в равновесии цены всех товаров будут положительны и найдите равновесие.

(б) Пусть первоначальные запасы индивида B включают положительное количество лишь некоторых товаров. Обозначьте через K множество индексов таких благ, запас которых равен нулю. Считайте, что это множество непусто, но не включает все товары в экономике. Найдите все равновесные наборы цен такие, что $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

Решение и схема оценивания:

(а) Обоснование положительности цен (3 б.)

Предположим, что равновесие существует. Тогда равновесные цены всех товаров положительны. Действительно, поскольку начальные запасы потребителя B положительны, то (в равновесных ценах) доход положителен. Тогда в бюджетном множестве этого потребителя нет наилучшего потребительского набора (он предъявляет неограниченный спрос на товары, цены которых равны нулю), в противоречие с определением равновесия.

Спрос потребителя A (2 б.)

Наилучший потребительский набор потребителя A при любых положительных ценах определен однозначно $x_i^A=\dfrac{p\omega^A}{p_1+\ldots+p_N}=p\omega^A$ *при нормировке цен* $p_1+\ldots+p_N=1$

Спрос потребителя B (1 б.)

Для потребителя B при положительных ценах расходы на каждый товар составляют $\dfrac{1}{N}$ *от его бюджета* $x_i^B=\dfrac{p\omega^B}{Np_i}$.

Равновесие (2 б.)

В равновесии совокупный спрос должен быть равен предложению $p\omega^A+\dfrac{p\left(10-\omega^A\right)}{p_i}=10$, *откуда находим, что все цены одинаковы* $p_i=\dfrac{p\left(10-\omega^A\right)}{10-p\omega^A}$, *что с учетом нормировки дает*

$$p_i=\frac{1}{N},\ \text{и}\ x_i^A=\frac{\sum_{i=1}^{N}\omega_i^A}{N}\ \text{и}\ x_i^B=\frac{\sum_{i=1}^{N}\omega_i^B}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(10-\omega_i^A\right)}{N}.$$

(б) Равновесие, в котором цены всех товаров, не входящих в K, равны нулю (8 б.)

Если, какие-то товары отсутствуют в начальном запасе потребителя B, то любой неотрицательный вектор цен, такой что $p_k = 0, k \notin K$ является вектором равновесных цен. Действительно, при таких ценах доход потребителя равен нулю, а потому его бюджетное множество включает лишь один набор $(0,...,0)$, который и будет наилучшим.

При этом доход потребителя A будет равен $\sum_{i \in K} 0 \times \omega_i^A + \sum_{i \in K} p_i \times 10 = 10 \sum_{i \in K} p_i = 10 \sum_i p_i = 10$.

Заметим, что набор x^A, где $x_i^A = 10$ будет в точности доступен при этих ценах и доходе и будет приносить максимальную полезность. В таком случае совокупный спрос по каждому товару составит 10 и будет в точности равен запасу товара в экономике. Таким образом, любые вектора цен $p \in R_+^N$ такие, что $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ и $p_i = 0, i \notin K$ являются равновесными.

Обоснование невозможности равновесия, где цена хотя бы какого-то товара, не входящего в K, равна нулю (2 б.)

Заметим, что ситуация, где цена хотя бы одного товара равна нулю при наличии положительной цены на товар, который имеется у агента B в положительном количестве, не может быть равновесием, так как в этом случае доход агента B был бы положителен, и он предъявлял бы неограниченный спрос на бесплатное благо.

Равновесие с положительными ценами (2 б.)

Осталось рассмотреть вариант, где все цены положительны. Тогда агент B имеет положительный доход и предъявляет спрос $x_i^B = \dfrac{p\omega^B}{Np_i}$. *Этот случай был разобран в пункте (а), результаты которого остаются справедливы. Таким образом, цены* $p_i = \dfrac{1}{N} \left(i = 1,\dots,N\right)$ *также будут равновесными.*

Задание 2. **(30 баллов)** Рассмотрите максимизирующую прибыль фирму, которая является монополистом на рынке готовой продукции. Ее издержки производства представимы функцией $TC(Q) = cQ$, где $c > 0$.

(а) Покажите, что прибыль фирмы не может возрасти при повышении ее предельных издержек (заметим, что изменение издержек не обязано быть дифференциально малым).

(б) Предположим, что функция спроса на продукцию фирмы имеет постоянную эластичность ε, где $|\varepsilon| > 1$. Покажите, что в этом случае рост предельных издержек влечет снижение выручки фирмы.

(в) Пусть спрос на продукцию фирмы имеет вид $Q^d(p) = \begin{cases} 1-p, & p \le 1 \\ 0, & p > 1 \end{cases}$, а предельные издержки $c = 0.2$. Предположим, что фирма продает свою продукцию не потребителям, а посреднику. Считайте, что посредник максимизирует свою прибыль, а процесс перепродажи продукции не сопряжен с дополнительными издержками. Посредник выбирает цену, по которой он продает товар потребителям, а производитель выбирает цену, по которой он продает товар посреднику. Найдите цену, по которой посредник будет продавать товар потребителям и цену, по которой производитель будет продавать товар посреднику.

(г) Модифицируйте модель, описанную в предыдущем пункте, полагая, что в цепочке задействован не один, а N посредников. Найдите цену, которая будет уплачена конечными потребителями продукции.

Решение и схема оценивания:

(а) Доказательство (5 б.)

Пусть $\pi^0, q^0, TC(q^0)$ *– прибыль, выпуск и издержки фирмы до изменения функции издержек, а* $\pi^1, q^1, TC(q^1)$*, соответственно, после изменения функции издержек.*

Тогда $\pi^0 = p(q^0)q^0 - TC(q^0) \ge p(q^1)q^1 - TC(q^1)$ *по определению* q^0. *Далее,* $p(q^1)q^1 - TC(q^1) \ge p(q^1)q^1 - TC^1(q^1) = \pi^1$. ***(5 б.)***

(б) Анализ изменения цены (1 б.)

Функция спроса на продукцию фирмы $D(p) = Ap^{\varepsilon}$. *Цена на эту продукцию зависит от предельных издержек производства,* MC, *и эластичности* ε *следующим образом:* $p = \dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{|\varepsilon|}}$.

Поэтому цена возрастает при повышении предельных издержек.

Анализ изменения выручки (4 б.)*Поскольку функция спроса убывает по цене, то рост цены ведет к снижению выпуска, но в силу того, что эластичность спроса по цене больше единицы объем продаж (в процентном выражении) упадет сильнее, чем выросла цена, что повлечет сокращение выручки.*

(в) Постановка задачи посредника (3 б.)

Пусть посредник приобретает товар у производителя по цене p_0, *а продает его потребителям по цене* p_1. *Тогда прибыль посредника от каждой единицы перепроданного товара составит* $(p_1 - p_0)$. *Более того, посредник будет приобретать у монополиста такое количество товара, которое он сочтет выгодным перепродать на рынке. Таким образом, посредник решает следующую задачу* $\max\limits_{p_1}(p_1 - p_0)(1-p_1) = \max\limits_{p_1}\left(-(p_1)^2 + (1+p_0)p_1 - p_0\right)$.

Нахождение функции спроса посредника (2 б.)

Поскольку мы имеем дело с параболой, ветви которой направлены вниз, то максимум достигается в вершине, то есть $p_1 = 0.5 + 0.5p_0$. *При этой цене посредник продаст* $Q(p_1) = 0.5 - 0.5p_0$, *если* $p_0 \le 1$. *Эта функция является спросом посредника на продукцию производителя.*

Постановка задачи производителя (3 б.)

Тогда производитель будет максимизировать свою прибыль с учетом полученного спроса посредника, то есть производитель будет решать следующую задачу

$$\max_{p_0}(p_0 - 0.2)(0.5 - 0.5p_0) = \max_{p_0}\left(-0.5(p_0)^2 + 0.6p_0 - 0.1\right).$$

Нахождение цен производителя и посредника (2 б.)

Максимум достигается в вершине параболы, то есть $p_0 = 0.6$. *Соответственно,* $p_1 = 0.8$.

(г) Постановка задачи последнего посредника (N) и нахождение его функции спроса (3 б.)

Начнем анализ с последнего звена в цепочке посредников.

Итак, посредник N *приобретает товар по цене* p_{N-1} *и продает его потребителям по цене* p_N *в количестве* $Q(p_N) = 1 - p_N$. *Таким образом, посредник* N *выбирает цену* p_N, *исходя из максимизации собственной прибыли:*

$$\max_{p_N}(p_N - p_{N-1})(1-p_N) = \max_{p_N}\left(-(p_N)^2 + (1+p_{N-1})p_{N-1} - p_{N-1}\right).$$

Максимум достигается в вершине параболы при $p_N = 0.5 + 0.5p_{N-1}$. *При этой цене посредник продаст* $Q_N = 1 - p_N = 0.5 - 0.5p_{N-1}$, *если* $p_{N-1} \le 1$. *Эта функция является спросом посредника* N *на продукцию посредника* $N-1$.

Итеративное решение для посредника с произвольным номером k (5 б.)

Посредник $N-1$ *выбирает цену* p_{N-1}*, максимизируя свою прибыль:*

$$\max_{p_{N-1}} 0.5(p_{N-1}-p_{N-2})(1-p_{N-1})=\max_{p_{N-1}} 0.5\left(-(p_{N-1})^2+(1+p_{N-2})p_{N-1}-p_{N-2}\right).$$

Максимум достигается в вершине параболы при $p_{N-1}=0.5(1+p_{N-2})$*. При этой цене посредник* $N-1$ *продаст* $Q_{N-1}=0.5(1-p_{N-1})=0.5(1-0.5(1+p_{N-2}))=0.5^2(1-p_{N-2})$.

Посредник $N-2$ *выбирает цену* p_{N-2}*, максимизируя свою прибыль:*

$$\max_{p_{N-2}} 0.5^2(p_{N-2}-p_{N-3})(1-p_{N-2})=0.5^2\max_{p_{N-2}}\left(-(p_{N-2})^2+(1+p_{N-3})p_{N-2}-p_{N-3}\right).$$

Максимум достигается в вершине параболы при $p_{N-2}=0.5(1+p_{N-3})$*. При этой цене посредник* $N-1$ *продаст* $Q_{N-2}=0.5^2(1-p_{N-2})=0.5^3(1-p_{N-3})$.

Итак, для агента k *цена составит* $p_k=0.5(1+p_{k-1})$*, а объем продаж будет равен* $Q_k=0.5^{N-k}(1-p_k)=0.5^{N-k+1}(1-p_{k-1})$.

Нахождение цены, уплачиваемой конечными потребителями продукции (2 б.)

Заметим, что производителя можно рассматривать как агента с номером $k=0$*, для которого* $p_{-1}=0.2$*. Тогда* $p_0=0.6$ *и* $Q_0=0.5^N\times 0.4$.

При этом финальная цена составит

$$p_N=0.5(1+p_{N-1})=0.5+0.5^2(1+p_{N-2})=0.5+0.5^2+0.5^3(1+p_{N-3})=\ldots=0.5+0.5^2+\ldots+0.5^N(1+p_0)=$$
$$=0.5+0.5^2+\ldots+0.5^N+0.5^N p_0=1-0.5^N+0.5^N\times 0.6=1-0.4\times 0.5^N$$

Заметим, что этот же результат можно было получить быстрее. Поскольку объем продаж остается одним и тем же, то $Q_N=Q_0$*, откуда находим* $p_N=1-Q_N=1-0.4\times 0.5^N$

Макроэкономика

Задание 3. (20 баллов) Рассмотрим закрытую экономику с гибкими ценами, в которой выпуск производится только при помощи труда с производственной функцией $F(L)=8\sqrt{L}$. Рынок труда и рынок конечной продукции совершенно конкурентны. Предложение труда имеет вид $L^s = 2000\frac{W}{P}$, где W - номинальная зарплата, P - уровень цен. Функция потребления имеет вид $C = 20 + 0{,}8(Y - T)$. Функция инвестиций задаётся как $I = 44 - 4r$, где r - реальная ставка процента, выраженная в процентных пунктах. Государственные закупки $G = 20$. Чистые налоговые сборы определяются как $T = 10 + 0{,}25Y$, номинальное предложение денег $M^s = 260$, спрос на реальные денежные остатки $L(Y,r) = Y - 10r$. Инфляционные ожидания отсутствуют.

(а) Выведите функцию спроса на труд, рассчитайте реальную зарплату и занятость в равновесии на рынке труда.
(б) Определите уравнение кривой совокупного предложения.
(в) Выведите уравнение кривых IS, LM и совокупного спроса AD.
(г) Рассчитайте равновесные уровень цен, ставку процента, номинальную зарплату, долю инвестиций в ВВП.
(д) Как в данной экономике увеличение предложения денег повлияет на долю инвестиций в ВВП? Ответ поясните.

Решение и схема оценивания:
(а) (6 баллов)

Выпишем задачу максимизации прибыли репрезентативной фирмы:

$$\pi = P * 8\sqrt{L} - wL \to \max_{L \geq 0}$$

Условие первого порядка имеет вид:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{4P}{\sqrt{L}} - w = 0$$

Отсюда получаем функцию спроса на труд:

$$L^d = \frac{16}{\left(w/p\right)^2}$$

Проверим выполнение условия второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = -\frac{2P}{L^{3/2}} < 0$$

Приравнивая спрос на труд и предложение, определим равновесную реальную зарплату и занятость на рынке труда:

$$L^d = L^s \Rightarrow \frac{w}{P} = 0{,}2; L = 400$$

Идея о том, что равновесие на рынке труда определяется и равенства спроса на труд и предложения труда – 1 балл;

нахождение функции спроса на труд – 3 балла;

нахождение равновесных значений зарплаты и занятости – 2 балла.

За любую арифметическую ошибку снимался 1 балл.

(б) (2 балла)

В экономике с гибкими ценами рынок труда всегда находится в равновесии, т.е. кривая предложения вертикальна на уровне $Y = 8\sqrt{400} = 160$

Нахождение потенциального выпуска – 1 балл;

указание того, что кривая совокупного предложения вертикальна на уровне потенциального выпуска – 1 балл.

(в) (6 баллов)

Кривая IS показывает все возможные комбинации ставки процента и выпуска, соответствующие равновесию на товарном рынке:

$$IS: Y = C + I + G = 20 + 0{,}8*(Y - 10 - 0{,}25Y) + 44 - 4r + 20 = 76 + 0{,}6Y - 4r;$$
$$0{,}4Y = 76 - 4r$$
$$Y = 190 - 10r$$

Кривая LM показывает все возможные комбинации ставки процента и выпуска, соответствующие равновесию на денежном рынке:

$$LM: \frac{M^s}{P} = L(Y, r)$$

$$\frac{260}{P} = Y - 10r$$

$$Y = \frac{260}{P} + 10r$$

Кривая AD показывает все возможные комбинации ставки процента и выпуска, соответствующие равновесию товарного и денежного рынков:

$$\begin{cases} Y = 190 - 10r \\ Y = \frac{260}{P} + 10r \end{cases}$$

Из данной системы после преобразований получаем уравнение кривой AD:

$$Y = 95 + \frac{130}{P}$$

Определение уравнения кривой IS – 2 балла;

определение уравнения кривой LM – 2 балла (если к спросу на реальные денежные остатки приравнивалось номинальное, а не реальное предложение денег – 1 балл);

определение уравнения кривой AD – 2 балла.

За любую арифметическую ошибку снимался 1 балл.

Если выписывалось уравнение кривой IS, но было указано, что это кривая AD, ставился 1 балл.

(г) (2 балла)

Приравнивая совокупный спрос к совокупному предложению, получаем:

$$95 + \frac{130}{P} = 160 \Rightarrow P = 2; Y = 160;$$

$$r = 3(\textit{из} \quad \textit{уравнения} \quad IS) \Rightarrow I = 32;$$

$$w = \frac{w}{P} * P = 0{,}2 * 2 = 0{,}4.$$

Доля инвестиций в ВВП $\frac{I}{Y} = \frac{32}{160} = 0{,}2$

Нахождение всех неизвестных – 2 балла;

нахождение некоторых, но не всех неизвестных – 1 балл.

Если получались неверные ответы из-за арифметических ошибок в предыдущих пунктах - 2 балла

(д) (4 балла)

В данной модели ВВП соответствует уровню полной занятости на рынке труда, а значит, увеличение предложения денег не окажет влияния на равновесный ВВП. Из уравнения IS видим, что при неизменном ВВП ставка процента также останется неизменной, т.е. и инвестиции не изменятся. Таким образом, изменение предложения денег не повлияет на долю инвестиций в ВВП.

Если указано, что рост денежной массы ведёт к сокращению ставки процента и к росту инвестиций, но никак не учитывается гибкость цен – 1 балл

Задание 4. (30 баллов) Рассмотрим модель Солоу с производственной функцией с постоянной эластичностью замещения между трудом и капиталом, равной 0,5:
$Y = (\alpha K^{-1} + (1-\alpha)(AL)^{-1})^{-1}$,
где α - параметр модели, $0 < \alpha < 1$.
Остальные гипотезы являются стандартными для модели Солоу: население растет с темпом n, темпы технического прогресса составляют g, норма амортизации равна δ, а норма сбережений составляет s. Время непрерывное.
Задания:
(а) Проверьте, выполняются ли для данной производственной функции условия Инады.
(б) Определите, при каком соотношении параметров модели существует траектория сбалансированного роста с положительным значением капиталовооруженности эффективного труда.
(в) Выразите капиталовооруженность эффективного труда на траектории сбалансированного роста через параметры модели.
(г) Выразите через параметры модели капиталовооруженность эффективного труда, соответствующую золотому правилу запаса капитала. Примите в расчет, что запас капитала, соответствующий золотому правилу, может равняться нулю.
(д) При каком ограничении на параметры модели экономика в долгосрочном периоде стремится к запасу капитала, соответствующему золотому правилу?

Решение и схема оценивания:

(а) 8 баллов

$$f'(k) = \alpha k^{-2}\left(\alpha k^{-1} + (1-\alpha)\right)^{-2} = \frac{\alpha}{(\alpha + (1-\alpha)k)^2}$$

$$\lim_{k\to 0+} f'(k) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\lim_{k\to \infty} f'(k) = 0$$

Таким образом, выполняется только правое условие Инады, левое условие нарушено.

(б) 4 балла

Необходимым и достаточным условием существования траектории сбалансированного роста с положительным значением капиталовооруженности эффективного труда является:

$$\lim_{k\to 0+} sf'(k) > n + g + \delta,$$

откуда

$$\frac{s}{\alpha} > n + g + \delta$$

(в) 6 баллов

Если выполняется условие, найденное в предыдущем пункте, то из основного уравнения динамики получаем:

$$s\left(\alpha k^{-1} + (1-\alpha)\right)^{-1} = (n+g+\delta)k,$$

откуда выражаем:

$$k^* = \begin{cases} 0, & if\ n+g+\delta \geq \dfrac{s}{\alpha} \\ \dfrac{s-\alpha(n+g+\delta)}{(1-\alpha)(n+g+\delta)}, & otherwise \end{cases}$$

(г) 6 баллов

Ставка процента должна равняться темпу экономического роста:

$$\frac{\alpha}{(\alpha+(1-\alpha)k)^2} = n+g+\delta,$$

откуда:

$$k^{GR} = \begin{cases} 0, & if\dfrac{1}{\alpha} < n+g+\delta \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{n+g+\delta}} - \alpha\right), & otherwise \end{cases}$$

(д) 6 баллов

Сопоставляя решения заданий 3 и 4, мы видим, что экономика стремится к запасу капитала, соответствующему золотому правилу в двух случаях.

Случай 1:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} > n+g+\delta \\ s^2 = \alpha(n+g+\delta) \end{cases}$$

Случай 2:

$$\frac{1}{\alpha} \leq n+g+\delta$$