

## Решение задач второго тура

### Задача 6. [Ноттингем-2][20 баллов]

Ноттингем, XXI век. На рынке гаджетов действуют сто фирм, воспринимающие цену как заданную. У половины фирм функция индивидуального предложения имеет вид  $Q_s = P - 2$ . Назовем эту группу фирм *первой*. Остальные 50 фирм (назовем эту группу *второй*) используют чуть более совершенную технологию, и функция предложения каждой из них имеет вид  $Q_s = P - 1$ . Естественно, прибыль у второй группы фирм в равновесии немного больше. Вспомнив о славном прошлом города, государство решило провести политику, включающую в себя:

(i) Предоставление каждой фирме в первой группе потоварной субсидии по ставке  $s = 2$ ;

(ii) Введение потоварного налога на каждую из фирм во второй группе по ставке  $t = 2$ .

Вам предлагается проанализировать последствия описанной «перераспределительной» политики. Функция рыночного спроса описывается уравнением  $Q_d = 1850 - 100P$ .

а) (6 баллов) Докажите, что суммарный выпуск фирм не изменится после вмешательства государства. Был бы этот вывод верен при любой другой убывающей функции спроса?

б) (9 баллов) Казалось бы, если равновесный выпуск остался без изменений, то и общественное благосостояние не должно было измениться в результате проведения политики. Чтобы разобраться в ситуации, определим величину общественного благосостояния  $W$  как

$$W = H + \pi + T - S.$$

Благосостояние потребителей ( $H$ ) не изменилось в результате проведения политики, так как они покупают столько же и по той же цене. Определив суммарную прибыль фирм ( $\pi$ ), налоговые поступления в бюджет ( $T$ ) и затраты государства на субсидию ( $S$ ) до и после проведения политики, сделайте вывод, повлияла ли политика государства на общественное благосостояние.

в) (5 баллов) Если у вас получилось, что политика государства повлияла на общественное благосостояние, объясните, почему это произошло. Приведите содержательное экономическое объяснение.

а) До вмешательства при цене 2 на рынке имеет место дефицит, и потому в равновесии цена больше 2. Значит, в равновесии каждая из фирм производит положительный объем, и потому равновесная цена удовлетворяет уравнению  $50(P - 2) + 50(P - 1) = 1850 - 100P$ . Значит, цена равна 10, а равновесное количество — 850.

После вмешательства функция рыночного предложения на том участке, где каждая фирма производит положительный выпуск, останется без изменений:

$$Q_s^{new} = 50(P - 1 - 2) + 50(P - 2 + 2) = 50(P - 1) + 50(P - 2) = Q_s^{old}.$$

Поэтому старая цена 10 по-прежнему является равновесной. Следовательно, не изменилось и равновесное количество, что и требовалось доказать.

Из-за того, что рыночное предложение не изменилось на целом участке, возникает соблазн сказать, что равновесное количество не изменилось бы при любой функции спроса. Однако это не так: если спрос достаточно мал (так что одна из фирм не производит до и/или после вмешательства), то проводимая политика повлияет на равновесное количество. Например, если спрос описывается уравнением  $Q = 150 - 50P$ , до вмешательства цена равна 2, производит только вторая группа, количество равно 50.

После вмешательства цена будет равна  $3/2$ , производить будет только первая группа, количество будет равно 75.

б) Для расчета прибыли восстановим функции издержек. Для каждой из фирм в первой группе  $MC_1(q) = P = 2 + q$ , и значит,  $TC_1(q) = 2q + q^2 / 2$ . Аналогично, для каждой из фирм во второй группе  $MC_2(q) = 1 + q$  и  $TC_2(q) = q + q^2 / 2$ . (Не нарушая общности, примем постоянные издержки равными 0, так как их величина не влияет на сравнение благосостояния).

До вмешательства фирма из первой группы производила 8 единиц, и прибыль ее равнялась  $8 \cdot 10 - 16 - 32 = 32$ . Фирма из второй группы производила 9 единиц, и прибыль ее равнялась  $9 \cdot 10 - 9 - 9^2 / 2 = 40,5$ . Суммарная прибыль фирм равна  $72,5 \cdot 50 = 3625$ .  $T$  и  $S$  равны 0, и благосостояние равно  $H + 3625$ .

После вмешательства фирма из первой группы произведет 10 единиц и ее прибыль (после выплаты субсидии) будет равна  $10 \cdot 10 - 20 - 50 + 2 \cdot 10 = 50$ . Фирма из второй группы произведет 7 единиц, и ее прибыль будет равна  $10 \cdot 7 - 7 - 7^2 / 2 - 2 \cdot 7 = 24,5$ . Общая прибыль фирм равна  $74,5 \cdot 50 = 3725$ . Однако теперь  $T = 2 \cdot 50 \cdot 7 = 700$  и  $S = 2 \cdot 50 \cdot 10 = 1000$ . Поэтому благосостояние равно  $H + 3725 + 700 - 1000 = H + 3425$ .

Таким образом, после вмешательства государства благосостояние упало!

в) Пусть  $\pi_0$  — суммарная прибыль фирм до осуществления расчетов с бюджетом. Заметим, что благосостояние зависит именно от  $\pi_0$ . Действительно,

$$W = H + \pi + T - S = H + (\pi_0 - T + S) + T - S = H + \pi_0.$$

Пусть  $TR$  — суммарная выручка фирм. Тогда

$$W = H + TR - 50(TC_1(q_1) + TC_2(q_2)).$$

Однако ни  $H$ , ни  $TR$  не изменились после вмешательства (так как не изменился совокупный выпуск). Значит, благосостояние уменьшилось из-за того, что *увеличилась* величина  $TC_1(q_1) + TC_2(q_2)$ .

И до, и после вмешательства  $q_1 + q_2 = 17$ , однако распределены эти 17 единиц по-разному.

До:  $17 = 8 + 9$ . После:  $17 = 10 + 7$ . Таким образом, в данном случае вмешательство привело к потерям благосостояния потому, что оно привело к искаженному, «неправильному» распределению выпуска *между* фирмами.

Действительно, представим себе, что нам нужно распределить выпуск в размере 17 между двумя заводами с функциями издержек  $TC_1(q) = 2q + q^2 / 2$  и  $TC_2(q) = q + q^2 / 2$ . Несложно проверить, что для минимизации суммарных издержек нужно как раз произвести 8 единиц на первом заводе, и 9 — на втором (случайно ли это вышло?). Вмешательство искажает это оптимальное распределение, увеличивая производство на менее эффективных фирмах, и уменьшая производство на более эффективных. Это ведет к росту суммарных издержек и потерям в благосостоянии, даже несмотря на то, что общий выпуск остается без изменений.

**Примечание:** существует ряд авторитетных макроэкономических исследований, которые оценивают, насколько «правильно» или «неправильно» распределяется выпуск между фирмами в масштабах страны. Результаты этих исследований говорят о том, что степенью «неправильности» распределения выпуска (misallocation) можно объяснить существенную часть разницы в благосостоянии стран.

### Задача 7. [Потребление или сбережения?][20 баллов]

Семен Кузнецов планирует свои расходы на ближайшие два года. К моменту начала 2013 года у него нет ни долгов, ни сбережений. Его доход в 2013 году составит 440 тыс. тугриков, а в 2014-м — 286 тыс. тугриков.

Семен может потратить в 2013 году весь свой доход на потребление, а может сберечь его часть, поместив деньги в банк под 20 % годовых, а также может потратить больше, чем 440 тыс. тугриков, взяв кредит под 30 % годовых. Максимальный объем кредита составляет 100 тыс. тугриков, и в 2014 году он должен быть полностью погашен. В 2014 году дополнительных кредитов Семен брать не может.

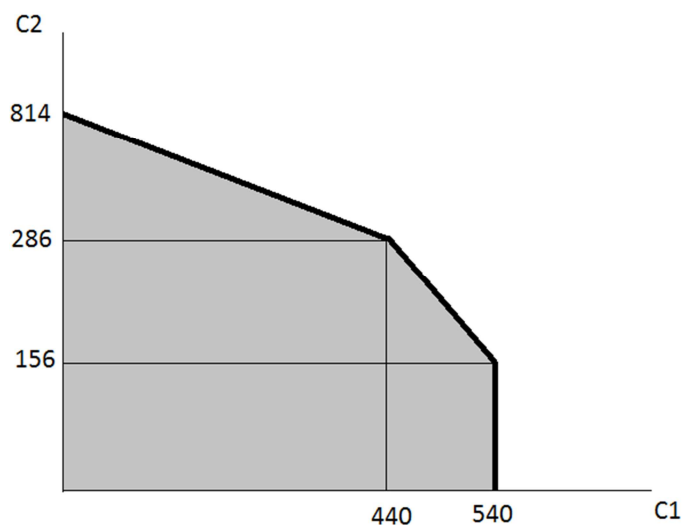
а) (8 баллов) Обозначим потребление Семена в 2013 и в 2014 году как  $C_1$  и  $C_2$  соответственно. Изобразите на графике в координатах  $(C_1; C_2)$  все доступные Семену комбинации потребления в 2013 и в 2014 годах. Не забудьте указать на своем рисунке координаты всех ключевых точек.

б) (4 балла) Предположим, что предпочтения Семена устроены следующим образом: он хотел бы, во-первых, иметь одинаковый уровень потребления в 2013 и в 2014 годах, а во-вторых, он хотел бы полностью потратить за эти два года свои доходы (то есть по итогам 2014 года он не хочет иметь ни долгов, ни накоплений). Какой уровень потребления следует выбрать Семену в каждом из рассматриваемых периодов?

в) (8 баллов) Рассмотрим экономику страны Фишерландии, в которой живет много потребителей, точно таких же, как Семен Кузнецов. Политика, проводимая центральным банком этой страны, не влияет на доходы потребителей, однако может воздействовать на процентные ставки. Центральный банк Фишерландии хотел бы стимулировать уровень частных сбережений ее граждан в 2013 году, увеличив его на 5 % по сравнению с тем уровнем сбережений, который наблюдается при нынешних процентных ставках. Следует ли центральному банку для достижения этой цели увеличивать или уменьшать ставку процента по сбережениям? До какого уровня? Дайте содержательную интерпретацию полученного результата.

#### Решение:

Комментарий к решению: Помимо прочего задача иллюстрирует тот интересный факт, что иногда для стимулирования сбережений необходимо снижать ставку процента по ним. (а) Все достижимые уровни потребления находятся на границе и внутри области, изображенной на рис. 1.



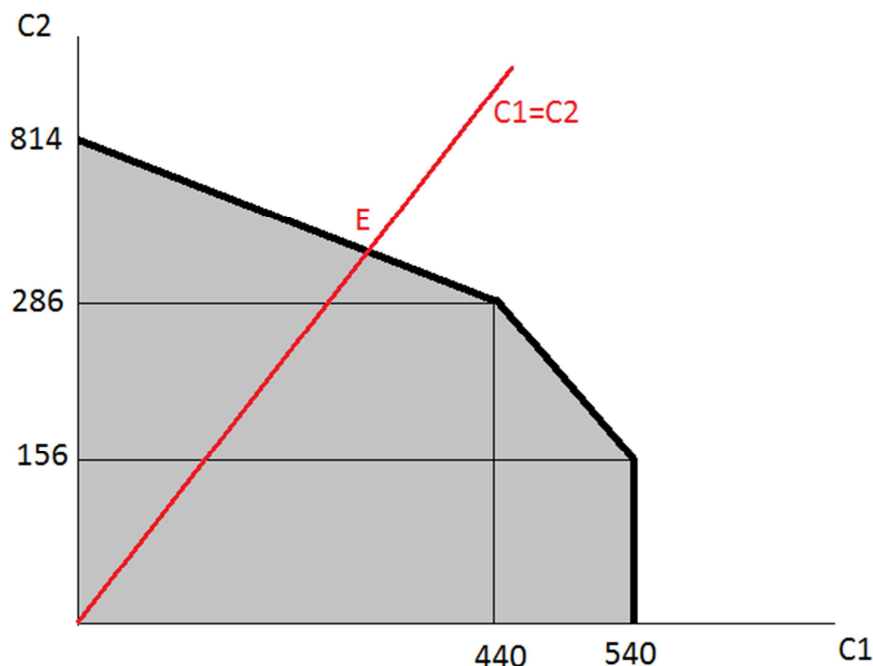
Точка на оси ординат соответствует ситуации, когда в первом периоде индивид ничего не потребляет и все сберегает:  $C_1=0$ ,  $C_2=440 \cdot 1,2 + 286 = 814$ .

Точка  $C_1=440$ ,  $C_2=286$  соответствует ситуации, когда потребитель не имеет в конце первого периода ни долгов ни накоплений.

Точка  $C_1=540$ ,  $C_2=156$  соответствует ситуации, когда индивид берет максимальный кредит 100 тугриков. В этом случае  $C_2=286 - 1,3 \cdot 100 = 156$ .

Рис. 1. Множество достижимых комбинаций  $(C_1, C_2)$

(б) Оптимальный выбор нашего потребителя соответствует точке E, изображенной на рисунке 2.



Как видно из рисунка, оптимальные уровни потребления могут быть найдены из решения следующей системы:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 \\ (1+r)C_1 + C_2 &= (1+r)440 + 286 \end{aligned}$$

Где  $r$  – это ставка процента по сбережениям, которая в нашем случае равна 0,2. Решив эту систему, получаем:

$$C_1 = C_2 = \frac{(1+r)440 + 286}{2+r} = 370$$

(в) Сбережения равны  $S = 440 - C_1 = 440 - \frac{(1+r)440 + 286}{2+r} = 440 - 370 = 70$

Новые сбережения должны быть на 5% больше, чем старые:

$$440 - \frac{(1+r)440 + 286}{2+r} = 1,05 * 70$$

Решив уравнение, получаем:  $r = \frac{2}{21} < 0,2$ . Таким образом, для повышения сбережений центральный банк должен снижать ставку процента по ним.

Такая ситуация возникает из-за того, что при снижении ставки процента наш индивид становится беднее, так как получает меньше процентных доходов<sup>1</sup>. Это побуждает его снижать потребление в обоих периодах. Таким образом, потребление первого периода снижается, в то время как доход индивида остается неизменным, следовательно, сбережения увеличиваются.

Ответ: (б) потребление в каждом периоде равно 370, (в) снизить до уровня  $\frac{2}{21} * 100\%$ .

<sup>1</sup> Возникает отрицательный эффект дохода.

**Задача 8.** [КПВ и монополия][20 баллов]

В странах А и В, составляющих мировую экономику, могут производиться только два товара (X и Y). Эти товары потребляются в комплектах: на единицу X всегда нужна единица Y, по отдельности товары бесполезны. В стране А альтернативная стоимость единицы X всегда равна 20 единицам Y, а в стране В альтернативная стоимость единицы Y всегда равна 0,2 единицам X. Страна А может произвести не более 420 единиц Y, а страна В — не более 42 единиц X. Страна А является монополистом: она предлагает стране В цену единицы товара X (в единицах Y, цена должна быть целым числом), по которой она готова его покупать или продавать, а потом страна В по этой цене продает стране А или покупает у нее столько товара X, сколько хочет. При этом сделка происходит, если каждая из стран оказывается в выигрыше, то есть может потребить больше комплектов из единицы X и единицы Y, чем без сделки.

а) (4 баллов) Найдите количество потребленных комплектов в каждой стране, если бы каждая страна функционировала в режиме закрытой экономики.

б) (8 баллов) Найдите функцию предложения страны В, то есть зависимость количества товара, который она в равновесии будет продавать, от цены, предложенной страной А. Приведите содержательное экономическое объяснение вида этой зависимости.

в) (8 баллов) Какую цену за единицу X назначит страна А? Сколько комплектов потребят жители каждой из стран в результате торговли?

**Решение**

а) Используя данные о максимальном производстве и альтернативной стоимости, можно составить уравнения КПВ. Для страны А:  $Y=420-20X$ , для страны В:  $Y=210-5X$ . Подставляя в каждое уравнение  $X=Y$  (условие полного комплекта), получаем, что в стране А можно произвести 20 комплектов, в стране В можно произвести 35 комплектов.

б) Страна В будет продавать X, потому что имеет сравнительное преимущество.

Если цена товара X в единицах Y равна  $k$ , то, произведя 42 единицы товара X и продав  $x_s$  из них, жители страны В смогут потребить  $42 - x_s$  единиц товара X и  $kx_s$  единиц товара Y. Решая уравнение  $X=Y$ , получаем функцию предложения:  $x_s = 42/(1+k)$  (это верно только при  $k > 5$ , при других ценах страна В не захочет продавать товар X).

Функция убывающая. Это так, потому что чем дороже страна будет продавать, тем ей лучше, то есть тем больше комплектов из X и Y она сможет себе позволить. Поскольку она делит 42 произведенных единицы между экспортом и потреблением, то чем больше иксов (и комплектов) она потребляет, тем меньше иксов продает. Следовательно, чем дороже можно продавать иксы, тем меньше она захочет их продавать. Другими словами: рост  $k$  означает снижение цены  $1/k$ , по которой страна В покупает икреки. Чем дешевле икреки, тем больше она их купит, но поскольку товары потребляются в комплектах, то тем больше она потребит и иксов, а значит, меньше их продаст.

в) Купив  $42/(1+k)$  единиц товара X, страна А заплатит  $42k/(1+k)$  единиц товара Y. При этом, если она произведет  $x_p$  единиц товара X сама, то в ее распоряжении будет  $x_p + 42/(1+k)$  единиц X и  $420 - 20x_p - 42k/(1+k)$ . Приравнивая потребление товаров X и Y и решая получившееся уравнение относительно  $x_p$ , получаем, что страна сможет потребить  $18 + 42/(1+k)$  комплектов. Это также убывающая функция при положительных  $k$ , следовательно, нужно предлагать минимально возможную цену.  $k$  должно быть целым числом, при этом страна В не согласится на  $k \leq 5$ . Значит, минимальное  $k = 6$ . В итоге страна А потребит 24 комплекта, а страна В — 36 комплектов.

**Задача 9.** [Кривая Лаффера при монополии][20 баллов]

Продукцию монополиста могут покупать две группы потребителей, функции спроса которых имеют вид  $q_1 = 36 - 3p$  и  $q_2 = 20 - p$ .  $p$  — цена товара (в евро за килограмм),  $q$  — количество товара (в кг). Функция общих издержек монополиста имеет вид:  $TC = 2q$ . Правительство вводит налог с производителей в виде фиксированной суммы за каждый килограмм проданного товара.

Запишите аналитически вид зависимости суммы налоговых поступлений от ставки налога, постройте ее график. Определите ставку налога, при которой поступления в государственный бюджет будут максимальными, а также рассчитайте их величину. Считайте, что при безразличии между двумя уровнями выпуска фирма выбирает тот, который больше.

**Решение:**

Рыночный спрос имеет вид:

$$q = \begin{cases} 56 - 4p, & 0 \leq p \leq 12 \\ 20 - p, & 12 < p \leq 20 \end{cases}$$

Найдем оптимальный выпуск фирмы для каждого значения ставки налога. Для этого рассмотрим два случая поведения фирмы. В первом случае она устанавливает цену не больше 12, а во втором – больше (рис. 1).

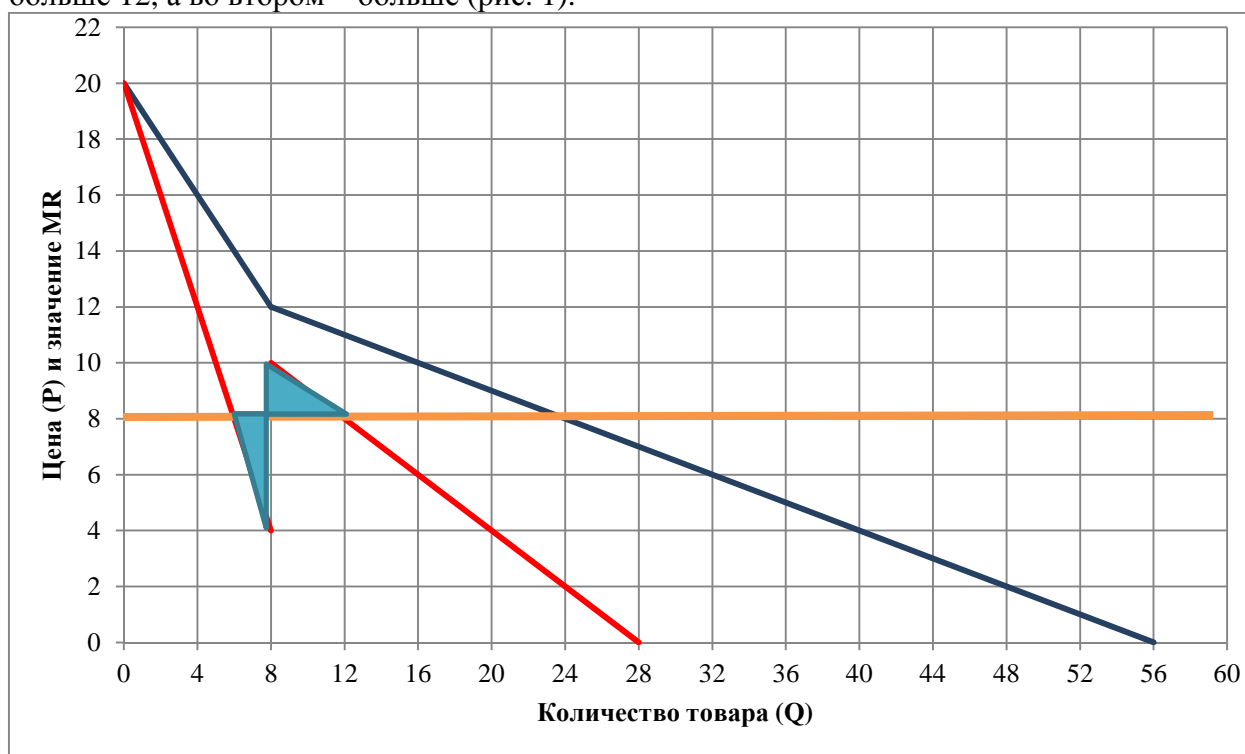


Рисунок 1 – Рыночный спрос и кривая предельной выручки

**Случай 1.**  $0 \leq p \leq 12$ ,  $8 \leq q \leq 56$ .

В этом случае предельный доход фирмы  $MR = 14 - 0,5q$  (строго убывает с ростом выпуска), а предельные издержки  $MC = 2 + t$  (постоянные). Следовательно, оптимальный выпуск может быть найден из условия  $MR = MC$ :

$$q = 24 - 2t.$$

Подставив этот выпуск в функцию прибыли, получаем:

$$PR = pq - 2q - tq = (12 - t)^2$$

**Случай 2.**  $12 < p \leq 20$ .  $0 \leq q < 8$ .

Аналогично предыдущему случаю, находим:

$$q = 0,5(18 - t). \\ PR = 0,25(18 - t)^2.$$

Устанавливая цену, фирма будет выбирать тот случай, в котором ее прибыль больше. То есть фирма может выбирать первый случай, если выполняется условие:

$$(12 - t)^2 \geq 0,25(18 - t)^2$$

Решив это неравенство, получаем условие выбора первого варианта:  $t \leq 6$ .

(Второй вариант выбора: найти ставку тарифа, при которой площади выделенных синим цветом треугольников на рис. 1 будут одинаковыми.)

Теперь можно для каждого значения ставки налога указать оптимальный выпуск фирмы.

$$q = \begin{cases} 24 - 2t, & 0 \leq t \leq 6 \\ 9 - 0,5t, & t > 6 \end{cases}$$

Точку  $t=6$  включает в первый случай в соответствии с условием задачи: «Считайте, что, если при некоторой ставке налога максимальная прибыль фирмы достигается при двух различных объемах выпуска, то фирма выбирает наибольший из них».

Заметим также, что в каждом из двух случаев выпуск фирмы удовлетворяет соответствующему ограничению (в первом случае  $8 \leq q \leq 56$ , во втором случае  $0 \leq q < 8$ ).

Теперь уже можно получить уравнение кривой Лаффера:

$$T = \begin{cases} (24 - 2t)t, & 0 \leq t \leq 6 \\ (9 - 0,5t)t, & t > 6 \end{cases}$$

Максимальные поступления в бюджет равны 72 и достигаются при ставке налога равной 6 (рис. 2).

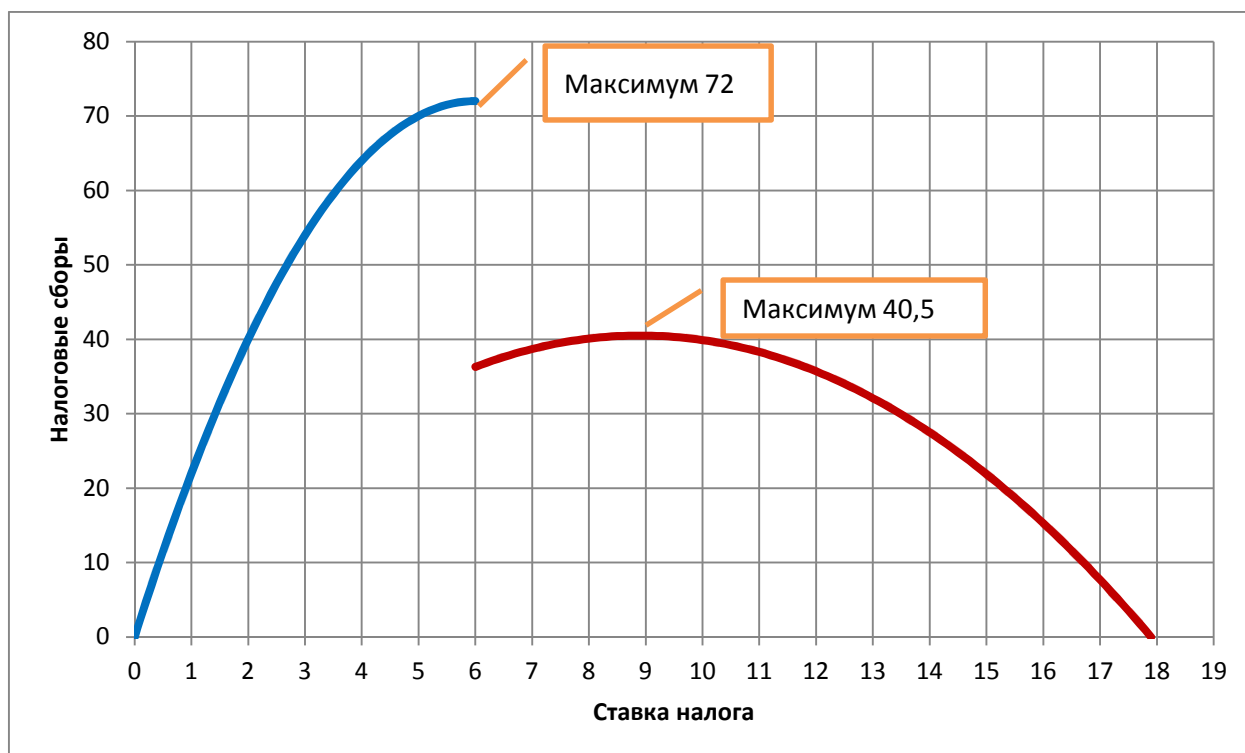


Рисунок 2 – Кривая Лаффера

**Задача 10.** [Манипулятор][20 баллов]

Совет директоров ЗАО «Манипулятор» состоит из трех человек — Васи, Пети и Маши (Маша — председатель совета). Они должны принять решение о том, какие рекомендации по распределению полученной компанией прибыли дать общему собранию акционеров. Существует три альтернативы:

**Альтернатива А.** Выплатить всю прибыль в виде дивидендов акционерам.

**Альтернатива В** Вложить всю прибыль в покупку новейшего оборудования.

**Альтернатива С.** Выплатить половину прибыли в виде дивидендов, а вторую половину вложить в усовершенствование имеющегося оборудования.

Предпочтения членов совета относительно альтернатив представлены в таблице:

	Вася	Петя	Маша
Самая лучшая	А	В	С
Средняя	В	С	А
Самая худшая	С	А	В

На голосование выставляются все три альтернативы, и каждый член совета должен проголосовать ровно за одну из них. Если есть альтернатива, которая набрала больше одного голоса, то она реализуется, в противном случае реализуется та альтернатива, за которую проголосовала председатель Маша. Голосование открытое и последовательное: сначала свой выбор объявляет вслух один член совета директоров, после него — второй и, наконец, третий.

Порядок голосования определяет председатель Маша. Какой порядок она выберет?

**Решение.** Всего существует 6 возможных порядков голосования; обозначим их по первым буквам имен членов совета директоров: ВПМ, ВМП, МПВ, МВП, ПМВ, ПМВ. Маша выберет тот из них, при котором она добивается реализации как можно более хорошей для себя альтернативы. Докажем, что при порядке голосования ПМВ Маша сможет добиться реализации альтернативы С, а при всех остальных порядках голосования альтернатива С реализована не будет.

Сначала установим несколько простых фактов.

**Утверждение 1.** Если первый из голосующих называет не самую лучшую для себя альтернативу, то именно названная им альтернатива будет реализована.

**Доказательство.** Для одного из оставшихся членов совета директоров названная первым голосующим альтернатива будет самой лучшей. Поэтому можно быть уверенным в том, что за данную альтернативу будет отдано как минимум 2 голоса, в результате чего она будет реализована.

**Утверждение 2.** Первый из голосующих никогда не отдаст свой голос за самую худшую из своих альтернатив.

**Доказательство.** По утверждению 1 если первый проголосует за альтернативу, которая не является для него наилучшей, то именно она будет реализована. Значит, первому заведомо лучше назвать среднюю альтернативу, чем самую худшую.

**Утверждение 3.** Если Вася голосует первым, то будет реализована альтернатива В.

**Доказательство.** Из утверждения 2 следует, что Вася не будет голосовать за альтернативу С. По утверждению 1, если Вася проголосует за В, то будет реализована альтернатива В.

Пусть теперь Вася голосует за А. Если вторым голосует Петя, то для него альтернатива В недостижима, так как, проголосовав за В, он обнаружит, что Маша проголосовала за С и победила альтернатива С. Поэтому Пете придется довольствоваться альтернативой В. Если второй голосует Маша, то она может обеспечить себе альтернативу С: если она проголосует за С, то Пете придется выбирать между В и С, и он сделает выбор



в пользу С. Понимая это, Вася назовет В, а не А. Тогда будет реализована альтернатива В.

**Утверждение 4.** Если Петя голосует первым, а Вася – вторым, то будет реализована альтернатива В.

**Доказательство.** Если Петя назовет альтернативу В, то Васе придется назвать В и согласиться с тем, что победит альтернатива В. Если бы Вася назвал А или С, то Маша отдаст свой голос за С. В результате этого победит С, что Васю не устраивает. Таким образом, при порядке голосования ПМВ побеждает альтернатива В.

**Упражнение.** С помощью аналогичных рассуждений докажите, что если первой ходит Маша, то будет реализована альтернатива А.

**Утверждение 5.** Если Петя голосует первым, а Маша – второй, то будет реализована альтернатива С.

**Доказательство.** В силу утверждения 1, если Петя проголосует за А или за С, то будет реализована альтернатива А или С соответственно. Если Петя проголосует за В, то Маше придется голосовать за А, так как во всех остальных случаях победит В, являющаяся наихудшей для Маши альтернативой. После голосования Маши Вася тоже проголосует за А, и победит А. Для Пети альтернатива А – самый плохой вариант. Поэтому он проголосует за С, чтобы обеспечить себе вторую по привлекательности альтернативу. Таким образом, в случае порядка ПМВ реализуется альтернатива С.

Из утверждений 1-5 и упражнения следует, что порядок ПМВ позволяет Маше добиться реализации наилучшей для себя альтернативы, причем этот порядок единственен.