Решение задач первого тура.

Задача 1. [Ноттингем-1][20 баллов]

Ноттингем, XII век. В городе есть две группы жителей: бедные и богатые. Счастье любого человека в городе можно рассчитать по формуле $H = Y - x^2/2$, где H — счастье человека, Y — его доход (с учетом перераспределительной политики, о политике см. ниже), а x — уровень усилий, который человек прикладывает для получения этого дохода. Вся разница между бедными и богатыми заключается в том, что, приложив уровень усилий x, бедный человек зарабатывает $V \times x$ ден. ед., а богатый — $W \times x$ ден. ед., где $W > V$. В каждой группе ровно по N человек. Каждый агент выбирает свой уровень усилий так, чтобы его счастье было максимальным.

Свергнув Принца Джона, к власти в городе пришел Робин Гуд. Естественно, он решил отбирать у богатых долю t дохода, и затем всю сумму сборов передавать бедным. Агенты выбирают уровни усилий, зная о проводимой Робином политике.

а) (12 баллов) Рассчитайте суммарный уровень дохода в обществе после введения налога. Покажите, что суммарный уровень дохода сокращается с ростом ставки налога, несмотря на то, что сумма, которую уплачивают богатые, в точности равна сумме, которую получают бедные. Объясните данный парадокс.

б) (8 баллов) Пусть $V = \sqrt{2}$, $W = 3$. Какую ставку налога установит Робин Гуд, стремясь к минимальному неравенству доходов, то есть минимизируя коэффициент Джини? На сколько ден. ед. уменьшится суммарный доход в результате проведения такой политики?

Решение:

а) Найдем, какие уровни усилий выберут богатые и бедные. Обозначим эти уровни усилий за x_r и x_p (от *rich* и *poor*).

Богатый агент решает задачу $(1-t)Wx_r - x_r^2/2 \to \max$, откуда в оптимуме $x_r = (1-t)W$.

Бедный агент (зная о том, что ему достанется трансферт), решает задачу

$$Vx_p - x_p^2/2 + tWx_r \to \max.$$

С точки зрения бедного агента, трансферт является константой (не зависит от его усилий) и поэтому оптимальный для бедного уровень усилий просто равен V.

Значит, суммарный уровень дохода в обществе будет равен

$$Y = N\left(Vx_p + tWx_r\right) + N(1-t)Wx_r = Vx_p + Wx_r = N\left(V^2 + (1-t)W^2\right).$$

Очевидно, что функция $Y(t) = N\left(V^2 + (1-t)W^2\right)$ является (строго) убывающей. Причина такого «парадоксального» эффекта заключается в том, что налог в данном случае является *искажающим* и плохо влияет на стимулы агентов: богатые агенты сокращают уровень усилий с ростом ставки налога. При этом неизбежно уменьшается размер «пирога», который затем делится между бедными и богатыми[1].

б) Если Робин сможет добиться ситуации, при которой после перераспределения у всех агентов доход будет одинаков, коэффициент Джини будет равен нулю, а значит, будет минимален. Найдем ставку налога, при которой доход богатого агента равен доходу бедного агента.

Доход богатого равен $(1-t)Wx_r = (1-t)^2W^2$.

Доход бедного равен $Vx_p + tWx_r = V^2 + t(1-t)W^2$.

[1] Этот эффект был описан небезызвестным для участников олимпиады экономистом Артуром Оукеном в книге *Equality and Efficiency: The Big Trade Off* (Washington, Brookings, 1975). Оукен называл этот эффект «эффектом протекающего ведра» (“leaky bucket”): часть денег, взятых у богатых, не доходит до бедных, а «утекает» по дороге.

Приравнивая эти две величины, получаем, что искомая ставка налога удовлетворяет уравнению $2t^2-3t+1=\frac{V^2}{W^2}=\frac{2}{9}$.

Решая это квадратное уравнение, получаем, что

$$t=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot2\cdot\frac{7}{9}}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{\frac{81-56}{9}}}{4}=\frac{3\pm\frac{5}{3}}{4}=\frac{1}{3};\frac{7}{6}.$$

Нам подходит только корень $t=\frac{1}{3}$, так как ставка налога должна быть не больше единицы. Суммарный уровень дохода будет равен $N\left(2+\left(1-\frac{1}{3}\right)9\right)=8N$. До перераспределения доход равнялся $11N$. Значит, доход сократился на $3N$ ден. ед.

Задача 2. [Издержки меню][20 баллов]

Фирма «Superapple» является собственником единственного яблоневого сада в Скалистой стране и несет только постоянные издержки при производстве яблок. Ежемесячный спрос на яблоки имеет вид: $q = 0,2 - P/M$, где q — количество тонн яблок, P — цена тонны яблок, а M — величина денежной массы в Скалистой стране в текущем месяце. Каждый месяц руководство фирмы устанавливает цену на свою продукцию таким образом, чтобы максимизировать прибыль в текущем месяце.

а) (4 балла) Определите, при каком объеме продаж прибыль фирмы будет максимальной.

б) (4 балла) Центральный банк Скалистой страны увеличил денежную массу. Скажется ли это событие на объеме выпуска фирмы? Приведите содержательную интерпретацию полученного результата.

в) (12 баллов) Предположим теперь, что если фирма «Superapple» планирует поменять цену на свою продукцию по сравнению с предыдущим месяцем, то она должна напечатать об этом объявление в местной газете. Объявление стоит $0,0025M$. Может ли при новых условиях стимулирующая монетарная политика оказать влияние на выпуск фирмы «Superapple»? Если да, определите максимальное увеличение выпуска фирмы, которое может быть достигнуто центральным банком страны при помощи изменения денежной массы.

Решение:

Комментарии к решению: Задача иллюстрирует **не**нейтральность денег в случае существования издержек меню. Номинальная цена объявления пропорциональна денежной массе для того, чтобы реальная цена оставалось неизменной при увеличении предложения денег. Обилие нулей в числе $0,0025M$ нужно для того, чтобы соотношение цены объявления и общей денежной массой в стране было более менее реалистичным.

(а) Функция прибыли:

$$PR = M(0,2 - q)q - FC$$

Прибыль максимальна при q=0,1 т. Оптимальная цена равна $p = 0,1M_0$.

(б) Из результата предыдущего пункта видно, что оптимальный выпуск фирмы не зависит от денежной массы. Рост предложения денег приведет к росту цен, но не повлияет на выпуск. Перед нами пример иллюстрирующий идею нейтральности денег.

(в) Обозначим денежную массу предыдущего периода M_0, а денежную массу текущего периода M_1.

Если фирма не станет менять цену по сравнению с предыдущим периодом, то эта цена составит $p = 0,1M_0$. Объем продаж фирмы будет равен $q = 0,2 - \frac{0,1M_0}{M_1}$. Следовательно, прибыль в этом случае равна:

$$PR = 0,1M_0\left(0,2 - \frac{0,1M_0}{M_1}\right) - FC$$

Если фирма поменяет цену по сравнению с предыдущим периодом, то эта цена будет равна $p = 0,1M_1$. Объем продаж фирмы составит $q = 0,1$. Следовательно, прибыль в этом случае будет равна:

$$PR = 0,1M_1 * 0,1 - FC - 0,0025M_1$$

Фирма НЕ будет менять цену, если прибыль в первом случае окажется не меньше, чем во втором:

$$0,1M_0\left(0,2 - \frac{0,1M_0}{M_1}\right) - FC \geq 0,1M_1 * 0,1 - FC - 0,0025M_1$$

Обозначим $\frac{M_1}{M_0} = m > 0$. Тогда наше неравенство можно переписать следующим образом:

$$0{,}1\left(0{,}2 - \frac{0{,}1}{m}\right) \geq 0{,}01m - 0{,}0025m$$

Решив неравенство, получаем: $m \leq 2$. Вспомним, что выпуск фирмы, если она не меняет цену, равен $q = 0{,}2 - \frac{0{,}1}{m}$. Ясно, что наибольшее значение выпуска достигается, если m в точности равно двум. При этом $q = 0{,}15$, что на 0,05 больше, чем при отсутствии издержек меню.

Ответы:

(а) 0,1 т.

(б) Нет, не скажется. Рост предложения денег приведет к росту цен, но не повлияет на выпуск. Перед нами пример иллюстрирующий идею нейтральности денег.

(в) да, 0,05.

Задача 3. [Налоговый компромисс][20 баллов]

Функция спроса на табуретки в области N задана уравнением $q = a - bp$, а функция предложения имеет вид $q = cp$, где p — цена одной табуретки (в рублях), q — объем продаж, a, b и c — положительные константы. Правительство области рассматривает два варианта политики по отношению к производителям табуреток, каждый из которых должен пополнить бюджет области на T^* рублей ($T^* > 0$):

Вариант А. Косвенный налог на продажу табуреток по ставке t^* рублей на одну табуретку.

Вариант Б. Прямой аккордный (не зависящий от объема продаж) налог с продавцов табуреток в размере T^* рублей. В этом случае все фирмы должны платить его в равных долях, причем сумма налога, приходящаяся на каждую фирму, не заставит ее покинуть отрасль.

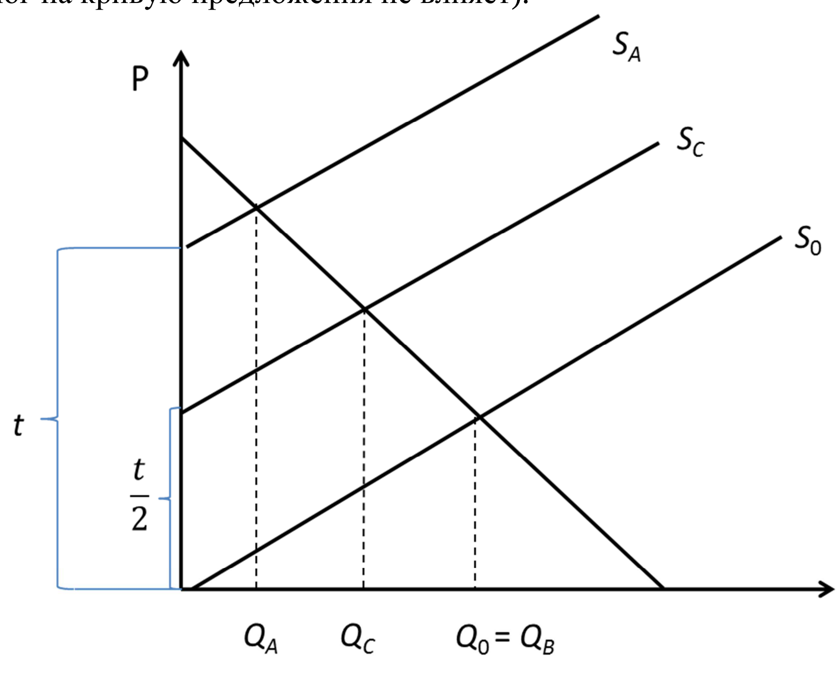
Зная, что и у прямых, и у косвенных налогов есть недостатки, экономический советник губернатора предложил промежуточную меру: одновременно ввести потоварный налог по ставке $t^*/2$ и аккордный налог по ставке $T^*/2$ (также распределив последний поровну между фирмами). По его словам, в результате введения такой меры областной бюджет пополнится ровно на ту же общую сумму T^*. Может ли он оказаться прав?

Решение:

Первый вариант решения:

Назовем вариантом С, вариант, предложенный советником.

Обозначим: Q_A — равновесный объем выпуска в случае реализации варианта А, Q_C — равновесный объем выпуска в случае реализации варианта С. Ясно, что $Q_C > Q_A$, так как при переходе от варианта А в варианту С снижается потоварный налог что приведет к увеличению предложения и, следовательно, к увеличению равновесного выпуска (а аккордный налог на кривую предложения не влияет).



Поступления в бюджет при варианте А: tQ_A

Поступления в бюджет при варианте В: T

Поступления в бюджет при варианте С: $0{,}5tQ_C + 0{,}5T$.

По условию поступления от всех вариантов совпадают: $0{,}5tQ_C + 0{,}5T = tQ_A = T$.

С учетом всего сказанного выше, имеем следующую систему:

$$0{,}5tQ_C+0{,}5T=tQ_A=T,\ T>0,\ t>0,\ Q_C>Q_A.$$

Эта система решений не имеет.

Ответ: описанная ситуация невозможна ни при каких значениях параметров задачи.

Второй вариант решения:

Кривая предложения с учетом потоварного налога: $q = c(p-t)$.

Равновесная находится из равенства величин спроса и предложения: $c(p-t) = a - bp$.

$$p = \frac{a+ct}{b+c}$$

Следовательно, равновесное количество с учетом потоварного налога равно:

$$q = \frac{c(a-bt)}{b+c}$$

Поступления в бюджет от потоварного налога равны:

$$tq = \frac{ct(a-bt)}{b+c}$$

Поступления в бюджет от реализации каждого из вариантов:

Вариант А: $\frac{ct(a-bt)}{b+c}$

Вариант В: T

Вариант С: $\frac{c*0{,}5t(a-b*0{,}5t)}{b+c} + 0{,}5T$

Поступления в бюджет от реализации всех вариантов должны быть равны:

$$\frac{ct(a-bt)}{b+c} = T = \frac{c*0{,}5t(a-b*0{,}5t)}{b+c} + 0{,}5T$$

Решая эту систему, получаем, что она не имеет решений ни при каких положительных значениях T и t.

Ответ: описанная ситуация невозможна ни при каких значениях параметров задачи.

Задача 4. [Двухпериодный „Сюрприз“][20 баллов]

Вспомним задачу из регионального этапа олимпиады про фирму-монополиста «Сюрприз». Предположим, что теперь ее горизонт планирования составляет не один, а два периода. В каждом периоде спрос на продукцию фирмы описывается уравнением $Q_d = 21 - P$, а общие издержки — уравнением $TC = Q^2/2$. Целью фирмы является максимизация суммарной прибыли за два периода. Специфика продукта компании такова, что его можно хранить с нулевыми издержками.

Государство планирует обложить фирму налогом в размере 5 д. е. с каждой *произведенной во втором периоде* единицы продукции.

а) (0 баллов) Призер регионального этапа легко определит, что если фирма не будет знать о налоге вообще, то в каждом периоде она произведет и продаст 7 единиц продукции, и прибыль фирмы за два периода после уплаты налогов будет равна 112. Мы решили не утомлять вас этими расчетами.

б) (10 баллов) Допустим, в начале первого периода фирма, не зная о налоге, заключила с потребителями контракт на поставку 7 единиц продукции в каждом периоде. После этого (но до принятия решения о производстве) информация о вводимом налоге все-таки стала доступна фирме. Контракты изменить или не выполнить нельзя. Может ли фирма увеличить свою прибыль по сравнению с пунктом а)? Если да, то определите оптимальный для фирмы план действий и максимальную прибыль фирмы.

в) (10 баллов) Допустим, в начале первого периода фирма, не зная о налоге, заключила с потребителями контракт на поставку 7 единиц продукции в первом периоде, а контракт на второй период не был заключен. После этого (но до принятия решения о производстве) информация о вводимом налоге все-таки стала доступна фирме. Может ли в этой ситуации фирма получить прибыль большую, чем в пункте б)? Если да, то определите оптимальный для фирмы план действий и максимальную прибыль.

Решение:

б) Фирма не может изменить объемы продаж, но она может умно выбрать объемы производства в двух периодах. Действительно, раз продукцию можно запасать, то 7 единиц, которые необходимо поставить во втором периоде, можно частично произвести не во втором периоде, а в первом, тем самым сэкономив на уплате налога. Таким образом, задача сводится к стандартной задаче о двух заводах. Нужно раскидать 7 единиц продукции между заводом первого периода (с функцией издержек $TC_1 = (q_1 + 7)^2 / 2$) и заводом второго периода (с функцией издержек $TC_2(q_2) = q_2^2 / 2 + 5q_2$) так, чтобы суммарные издержки были минимальны. Иными словами, фирме нужно решить задачу

$$TC = \left(\left(7 - q_2\right) + 7\right)^2 / 2 + q_2^2 / 2 + 5q_2 \to \min$$

График данной функции — парабола с ветвями вверх и вершиной в точке 4,5. Получаем, что 4,5 единиц из 7 нужно произвести все-таки во втором периоде, а 2,5 единицы произвести в первом периоде и запасти. Прибыль фирмы равна 118,25.

в) В данном случае фирма может управлять также и объемом продаж во втором периоде. Поэтому ограничение $q_1 + q_2 = 7$ отпадает. Задача фирмы будет иметь вид

$\pi(q_1, q_2) = (21-7) \cdot 7 - (q_1 + 7)^2 / 2 + (21 - q_1 - q_2)(q_1 + q_2) - q_2^2 / 2 - 5 \cdot q_2 \to \max$, где

q_1 — объем запасов, q_2 — объем производства во втором периоде.

Решать эту задачу можно разными методами.

Например, можно приравнять частные производные к нулю и решить получившуюся систему уравнений. Получившиеся уравнения легко интерпретировать экономически: мы получим равенство предельного дохода предельным издержкам на каждом заводе. Однако этот метод не является вполне школьным, так как неясно, как проверить, действительно ли является полученное решение максимумом функции.

Мы продемонстрируем другой метод решения, не требующий знания частных производных (и производных вообще).

Заметим, что при каждом q_2 наша функция является параболой с ветвями вниз относительно q_1. Вершина этой параболы равна $q_1^* = \frac{14}{3} - \frac{2}{3}q_2$. Иными словами, если q_2 уже выбрано, то всегда оптимально выбирать именно такое значение q_1. Подставляя это выражение в функцию прибыли, получаем, что максимально возможное значение прибыли при фиксированном q_2 равно

$$\pi(14/3 - 2q_2/3, q_2) = const + \frac{20}{3}q_2 - \frac{5}{6}q_2^2.$$

Но это тоже парабола с ветвями вниз! Отсюда легко находим, что оптимальное значение q_2 равно 4, а оптимальное значение q_1 равно $\frac{14}{3} - \frac{2}{3} \cdot 4 = 2$.

Итак, во втором периоде нужно продать не 7, а 6 единиц продукции, из которых 2 нужно произвести в первом периоде и запасти, а 4 нужно произвести во втором периоде и уплатить за них налог. Максимальная прибыль будет равна 119,5.

Есть и другие способы нахождения оптимума. Например, можно, обобщая решение пункта (а), вывести «общую» для фирмы функцию издержек $TC(Q)$, показывающую минимальные издержки на производство Q единиц продукции для продажи во втором периоде, а на втором этапе решить задачу $\pi(Q) = const + (21 - Q)Q - TC(Q) \to \max$.

Идея этого способа тоже заключается в том, чтобы свести оптимизацию по многим переменным к последовательной оптимизации по одной переменной, однако выбор переменных для последовательной оптимизации другой.

Задача 5. [Комбайн][20 баллов]

Фермер владеет двумя полями, на которых можно выращивать две давно полюбившиеся олимпиадникам культуры — Икс (X) и Игрек (Y). Информация о полях приведена в таблице:

Поле	Площадь, га	Урожайность X	Урожайность Y
Первое	10	1	2
Второе	20	2	1

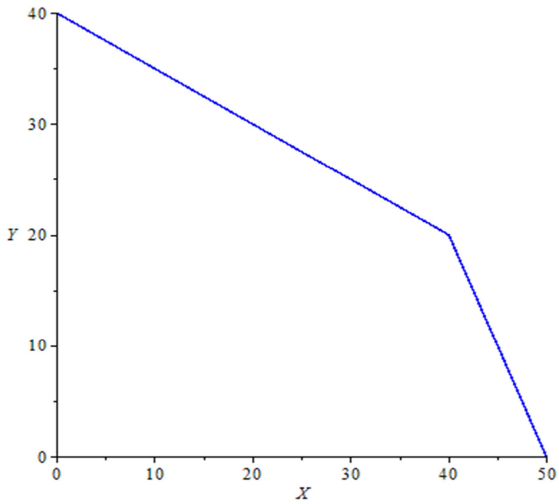
Под урожайностью понимается количество соответствующего продукта (в тоннах), которое можно будет получить с одного гектара посевов в конце сезона, длящегося 100 дней. Фермер может разделить каждое поле между двумя культурами в любой пропорции.

а) (5 баллов) Постройте кривую производственных возможностей фермера в координатах $(X;Y)$.

б) (15 баллов) Фермер задумывается о покупке нового комбайна, использование которого позволит увеличить урожайность культуры Y. Если комбайн проработает на некотором поле t дней, урожайность культуры Y на этом поле увеличится на $(0{,}02\times t)$ т/га. Комбайн не может работать на двух полях одновременно, и если фермер купит его, то он сможет распределять время работы комбайна между полями в любой пропорции (в частности, t не обязательно целое число). Какова будет КПВ фермера, если он приобретет комбайн?

Решение:

(а) Это стандартная задача сложения двух линейных КПВ. КПВ на первом поле описывается уравнением $Y = 20-2X$, на втором поле — уравнением $Y = 20-0,5X$. Складывая эти две КПВ, получаем картинку:



б) Зафиксируем то, как фермер засеял поля.

Ключевое наблюдение (лемма): заметим, что как бы фермер ни засеял поля, объем производства Игрека максимален, если комбайн работает все 100 дней только одном из полей (на каком именно — может зависеть от того, как засеяны поля).

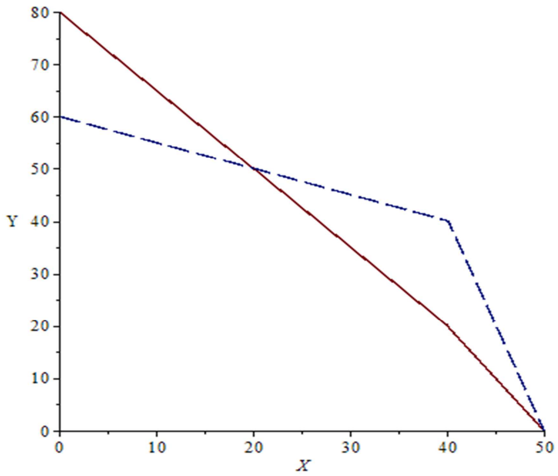
Доказательство леммы:

Пусть под Игрек отведено S_1 гектар на первом поле и S_2 гектар на втором поле. Обозначим за t время работы комбайна на первом поле (время работы на втором поле равно $100-t$). Тогда общий объем производства Игрека будет равен

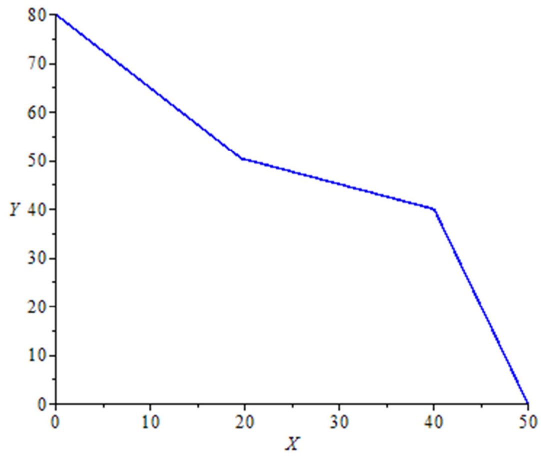
$$Y(t) = (2+0,02t)S_1 + (1+0,02(100-t))S_2 = 2S_1 + 3S_2 + 0,02(S_1 - S_2)t.$$

Заметим, что $Y(t)$ является линейной функцией и $t \in [0;100]$. Если коэффициент при t положителен, то функция достигает максимума при $t = 100$ (то есть оптимально отправить комбайн на весь срок на первое поле). Если коэффициент при t отрицателен, функция достигает максимума при $t = 0$ (оптимально отправить комбайн на весь срок на второе поле). Если коэффициент при t равен 0, то функция является константой, и любое значение t является оптимальным (в том числе, $t = 0$ и $t = 100$). Лемма доказана.

Зафиксируем теперь некое значение t. Тем самым мы зафиксировали урожайность Игрека на двух полях. Поэтому для каждого t мы можем построить КПВ фермера по аналогии с пунктом а). Для каждого t мы получим некоторую кусочно-линейную функцию КПВ(t). *Доказанная лемма означает, что любая КПВ(t) лежит не выше, чем КПВ(0) и КПВ(100).* Значит, для получения ответа нам достаточно построить КПВ(0) и КПВ(100).



На данной картинке КПВ(0) изображена сплошной линией, а КПВ(100) — пунктиром. Фермеру доступны все точки под обеими КПВ, и поэтому итоговым ответом будет верхняя огибающая двух КПВ:



Для справки: эта КПВ описывается уравнением

$$Y = \begin{cases} 80 - 1{,}5X, & X \le 20 \\ 60 - 0{,}5X, & 20 < X \le 40 \\ 200 - 4X, & X > 40 \end{cases}$$

Эта КПВ не является вогнутой, однако ничего страшного в этом нет. Подумайте, почему «закон возрастающих альтернативных издержек» в данном случае не выполняется, несмотря на то, что он выполняется для каждой отдельно взятой КПВ(t).