

**Время выполнения задания: 240 минут.**

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. Сколько раз к наибольшему однозначному числу нужно прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трёхзначное число?
2. Одним пакетиком чая можно заварить 2 или 3 стакана чая. Мила и Таня разделили коробку чайных пакетиков поровну. Мила заварила 33 стакана чая, а Таня — 47 стаканов. Сколько пакетиков было в коробке?
3. В некотором месяце три воскресенья были чётными числами. Каким днём недели было 15ое число этого месяца? (Если ответ «понедельник» — то пишете 1, если «вторник» — то 2, и т. д.)
4. Волк и Лиса делят между собой найденный в лесу клад. Волк взял себе половину всех золотых монет, Лиса — треть оставшихся монет, затем Волк — четверть оставшихся, затем Лиса —  $1/5$  оставшихся монет, Волк —  $1/6$ , Лиса —  $1/7$  часть оставшихся монет. Оставшиеся нераспределёнными после такого дележа монеты были подарены на день рождения Зайцу. Сколько монет получил Заяц на день рождения, если известно, что он получил меньше 100 монет?
5. Имеется 24 одинаковых ведра: 5 полностью наполнены водой, 11 наполнены водой наполовину, 8 пусты. Три человека распределили эти вёдра между собой так, что у всех оказалось одинаковое число вёдер и одинаковый объём воды (при этом вода не переливалась между вёдрами, не выливалась из вёдер и не добавлялась ни из каких источников). Пусть у первого человека оказалось  $a$  наполовину наполненных вёдер, у второго —  $b$ , у третьего —  $c$ . Найдите наибольшее возможное значение  $abc$ .
6. Узлами на бумаге в клеточку назовём точки пересечения вертикальных линий с горизонтальными. Вася отметил в узлах тетради в клеточку вершины квадрата  $10 \times 10$ , стороны которого проходят по линиям сетки, а после — все узлы, которые находятся внутри или на границе этого квадрата. В итоге оказались отмечены 121 узел. Далее он соединил отрезком каждую пару «соседних» узлов, то есть узлов на расстоянии 1 клетка друг от друга. При этом никакой отрезок не оказался проведённым дважды, в том числе и отрезки на границе квадрата. Какова суммарная длина проведённых Васей отрезков в сантиметрах (длина стороны клетки считается равной  $1/2$  сантиметра)?

7. На стороне  $BC$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  выбрали точку  $D$ . Оказалось, что каждый из треугольников  $ABD$  и  $ACD$  — равнобедренный, а один из них ещё и прямоугольный. Найдите величину наименьшего из углов треугольника  $ABC$  в градусах.
8. Вася каким-то образом расставляет скобки в выражении  $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 4$  и вычисляет значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло у него получиться?
9. Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?
10.  $N$  богатырей хотят составить график боевых дежурств на  $N$  дней так, чтобы каждый день дежурили три богатыря, и никакие два богатыря не дежурили вместе дважды. При каком наименьшем  $N$  это возможно?

**Ответы:**

1. - 10
2. - 32
3. - 6
4. - 60
5. - 45
6. - 110
7. - 22.5
8. - 76
9. - 333
10. - 7

**Время выполнения задания: 240 минут.**

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. Сколько раз из наименьшего трёхзначного числа нужно вычесть наименьшее натуральное число, чтобы получить наименьшее двузначное число?
2. Одним пакетиком чая можно заварить 3 или 4 стакана чая. Мила и Таня разделили коробку чайных пакетиков поровну. Мила заварила 59 стаканов чая, а Таня — 74 стакана. Сколько пакетиков было в коробке?
3. В некотором месяце три среды были чётными числами. Каким днём недели было 18ое число этого месяца? (Если ответ «понедельник» — то пишете 1, если «вторник» — то 2, и т. д.)
4. Базилио и Алиса делят между собой найденный в лесу клад. Кот взял себе половину всех золотых монет, лиса — треть оставшихся монет, затем кот — четверть оставшихся, и затем лиса —  $\frac{1}{5}$  оставшихся монет. Оставшиеся нераспределёнными после такого дележа монеты были подарены на день рождения Буратино. Какое наибольшее количество монет мог получить Буратино на день рождения, если известно, что он получил меньше 100 монет?
5. Натуральное число  $a$  таково, что оно является суммой трёх различных простых чисел, а  $7a$  является произведением тех же трёх простых чисел. Найдите  $a$ .
6. Эдуард нарисовал на чистом листе бумаги правильный треугольник со стороной 8 сантиметров. После этого он поделил каждую сторону на 8 равных частей. Затем он провёл все линии с концами в полученных отметках, которые параллельны какой-либо стороне исходного треугольника. На какое количество правильных треугольников со стороной 1 разбился исходный треугольник?
7. В прямоугольном треугольнике произведение высот в два раза меньше произведения сторон. Найдите наименьший угол этого треугольника в градусах.
8. Вася каким-то образом расставляет скобки в выражении  $18 - 8 : 2 + 6 \cdot 12$  и вычисляет значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло у него получиться?
9. Трамвайный билет состоит из шести цифр от 0 до 9. Сколько билетов содержат ровно 5 одинаковых цифр?
10.  $N$  богатырей хотят составить график боевых дежурств на  $N$  дней так, чтобы каждый день дежурили четыре богатыря, и никакие два богатыря не дежурили вместе дважды. При каком наименьшем  $N$  это возможно?

**Ответы:**

1. - 90

2. - 38

3. - 5

4. - 96

5. - 15

6. - 64

7. - 45

8. - 240

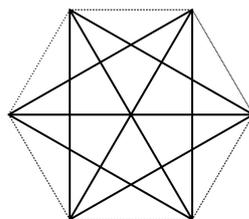
9. - 540

10. - 13

Время выполнения задания: 240 минут.

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. Волк и Лиса делят между собой найденный в лесу клад. Волк взял себе половину всех золотых монет, Лиса — треть оставшихся монет, затем Волк — четверть оставшихся, затем Лиса —  $1/5$  оставшихся монет, Волк —  $1/6$ , Лиса —  $1/7$ , Волк —  $1/8$ , наконец Лиса —  $1/9$  часть оставшихся монет. Оставшиеся нераспределёнными после такого дележа монеты были подарены на день рождения Зайцу. Сколько монет получил Заяц на день рождения, если известно, что он получил меньше 500 монет?
2. Одним пакетиком чая можно заварить 2 или 3 стакана чая. Мила и Таня разделили коробку чайных пакетиков поровну. Мила заварила 57 стаканов чая, а Таня — 83 стакана. Сколько пакетиков было в коробке?
3. Узлами на бумаге в клеточку назовём точки пересечения вертикальных линий с горизонтальными. Вася отметил в узлах тетради в клеточку вершины квадрата  $20 \times 20$ , стороны которого проходят по линиям сетки, а после — все узлы, которые находятся внутри или на границе этого квадрата. В итоге оказались отмечены 441 узел. Далее он соединил отрезком каждую пару «соседних» узлов, то есть узлов на расстоянии 1 клетка друг от друга. При этом никакой отрезок не оказался проведённым дважды, в том числе и отрезки на границе квадрата. Какова суммарная длина проведённых Васей отрезков в сантиметрах (длина стороны клетки считается равной  $1/2$  сантиметра)?
4. Вася каким-то образом расставляет скобки в выражении  $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$  и вычисляет значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло у него получиться?
5. Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?
6. В правильном шестиугольнике проведены все диагонали (см. рисунок). Какое наименьшее число точек нужно отметить строго внутри шестиугольника так, чтобы на каждой диагонали лежала хотя бы одна отмеченная точка?



7. Точку с координатами  $(299, 253)$  соединили с точкой с координатами  $(0, 0)$ . Сколько точек, обе координаты которых целые, лежат внутри этого отрезка (не считая концов)?

8. Сколько существует способов расставить на шахматной доске  $8 \times 8$  белую ладью и чёрного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью? Способы расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски, считаются *разными*. (Ладья бьёт короля, если он находится с ней на одной горизонтали или вертикали, т.е. в одной из закрашенных клеток на рис. 1. Король бьёт ладью, если ладья находится в одной из соседних с королём клеток, т.е. в одной из закрашенных клеток на рис. 2).

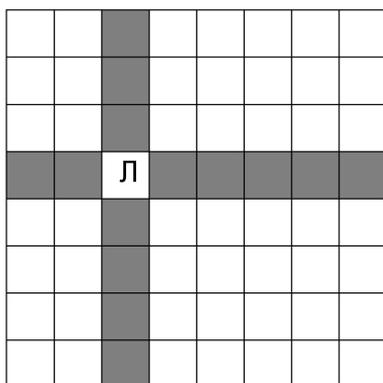


Рис. 1. Выделенные клетки под ударом ладьи.

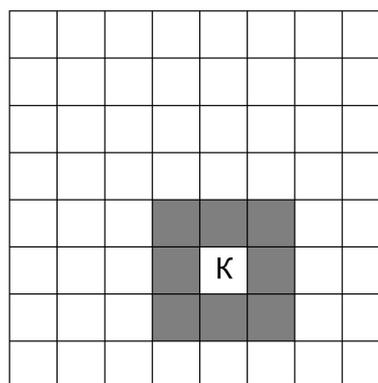


Рис. 2. Выделенные клетки под ударом короля

9. Окружность пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $K, L$ , сторону  $BC$  — в точках  $M, N$ , сторону  $CA$  — в точках  $R, S$ . Известно, что  $KL = MN = RS = 6$ ,  $AB = 12$ ,  $BC = 16$ ,  $\angle B = 90^\circ$ . Найдите радиус окружности.

10. Определим числа  $T_1, T_2, \dots, T_{256}$  следующим образом:  $T_1 = 2$  и  $T_n = 2^{T_{n-1}}$  для любого  $2 \leq n \leq 256$ . Найдите остаток от деления числа  $T_1 + T_2 + \dots + T_{256}$  на 255.

**Ответы:**

1. - 280
2. - 56
3. - 420
4. - 72
5. - 333
6. - 4
7. - 22
8. - 672
9. - 5
10. - 20

**Время выполнения задания: 240 минут.**

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. Базилио и Алиса делят между собой найденный в лесу клад. Кот взял себе половину всех золотых монет, лиса — треть оставшихся монет, затем кот — четверть оставшихся, и затем лиса —  $1/5$  оставшихся монет. Оставшиеся нераспределёнными после такого дележа монеты были подарены на день рождения Буратино. Какое наибольшее количество монет мог получить Буратино на день рождения, если известно, что он получил меньше 400 монет?
2. Одним пакетиком чая можно заварить 4 или 5 стаканов чая. Мила и Таня разделили коробку чайных пакетиков поровну. Мила заварила 90 стаканов чая, а Таня — 108 стаканов. Сколько пакетиков было в коробке?
3. Всеволод нарисовал на чистом листе бумаги правильный треугольник со стороной 9 сантиметров. После этого он поделил каждую сторону на 9 равных частей. Затем он провёл все линии с концами в полученных отметках, которые параллельны какой-либо стороне исходного треугольника. Исходный треугольник полученными линиями разбился на правильные треугольники со стороной 1. Какова суммарная длина нарисованных на листе линий (считая стороны исходного треугольника)? (Если ответ не целый, отделяйте дробную часть точкой).
4. Вася каким-то образом расставил скобки в выражении  $18 - 6 : 2 + 4 \cdot 12$  и вычислил значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло у него получиться? (Если ответ не целый, отделяйте дробную часть точкой).
5. Трамвайный билет состоит из шести цифр от 0 до 9. Сколько билетов содержат хотя бы 5 одинаковых цифр?
6. В правильном шестиугольнике проведены все диагонали. Какое наименьшее число точек нужно отметить строго внутри шестиугольника так, чтобы на каждой диагонали лежали хотя бы две отмеченных точки?
7. Точку с координатами  $(200, 159)$  соединили с точкой с координатами  $(13, 40)$ . Сколько точек с целыми координатами лежат внутри этого отрезка (не считая концов)?
8. Сколько существует способов расставить на шахматной доске  $8 \times 8$  белого слона и чёрного короля так, чтобы слон бил короля, но король не бил слона? (Слон бьёт короля, если он находится с ним на одной диагонали. Король бьёт слона, если слон находится в одной из соседних с королём клеток, по стороне или по углу.)

9. На плоскости нарисованы прямоугольник со сторонами 1 и 2 и квадрат со стороной  $\sqrt{2}$ . Чему равна наибольшая возможная площадь пересечения квадрата и прямоугольника? (Если ответ не целый, отделяйте дробную часть точкой).

10. Определим числа  $T_1, T_2, \dots, T_{729}$  следующим образом:  $T_1 = 3$  и  $T_n = 3^{T_{n-1}}$  для любого  $2 \leq n \leq 729$ . Найдите остаток от деления числа  $T_1 + T_2 + \dots + T_{729}$  на 728.

**Ответы:**

1. - 396

2. - 44

3. - 135

4. - 228

5. - 550

6. - 9

7. - 16

8. - 364

9. - 1.5

10. - 3

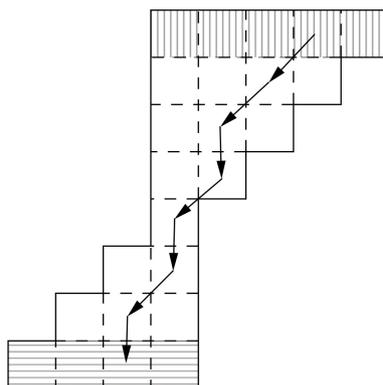
**Время выполнения задания: 240 минут.**

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», на остальных — «НЯ». Каждый ребёнок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 25 детей, слово «НЯНЯ» — 30 детей, а слово «МАНЯ» — 36 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?
2. В некотором натуральном числе посчитали сумму цифр. У получившегося числа снова посчитали сумму цифр, и у получившегося числа снова посчитали сумму цифр. Известно, что каждая новая сумма оказывалась не равна предыдущей. Найти наименьшее возможное исходное число.
3. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны 400 точек  $P_1, P_2, \dots, P_{400}$ . (Каждая точка  $P_i$  лежит между  $A$  и  $P_{i+1}$ , точки выбираются произвольно и могут делить сторону на отрезки различной длины.) Рассматриваются треугольники  $ABP_1, P_1BP_2, \dots, P_{399}BP_{400}, P_{400}BC$ . Какое наибольшее количество равнобедренных может быть среди них?
4. Из множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  выбираются три натуральных числа  $a, b, c$  (не обязательно различных). Сколько способов это сделать так, чтобы число  $a^{(b^c)}$  делилось на 4?
5. В магазине фрукты продаются только в упаковках двух видов: упаковка из 3 яблок и 12 груш стоит 6 долларов, упаковка из 12 яблок и 5 груш стоит 11 долларов. Требуется купить одинаковое (ненулевое) количество яблок и груш. Какую минимальную цену (в долларах) придётся заплатить?
6. Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  - различные корни уравнения  $x^4 - 2^{2013}x^2 + 49$ , идущие в порядке возрастания, т.е.  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . Найти значение выражения

$$-\frac{(7+x_1)(7+x_3)}{(1+x_2)(1+x_4)}.$$

7. Приведённая ниже диаграмма состоит из 24 единичных квадратов. Лягушка из каждой клетки может прыгнуть либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку влево-вниз по диагонали (не выходя при этом за границы диаграммы). Сколько существует путей лягушки, ведущих из верхнего ряда квадратов в нижний? (На рисунке показан один из путей лягушки. Верхний ряд квадратов выделен вертикальной штриховкой, нижний ряд - горизонтальной штриховкой.)



8. Какое наименьшее количество точек нужно отметить строго внутри правильного семиугольника так, чтобы на каждой диагонали лежала хотя бы одна отмеченная точка?

9. Окружность пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $K, L$ , сторону  $BC$  — в точках  $M, N$ , сторону  $AC$  — в точках  $R, S$ . Дано:  $KL = MN = RS = 6$ ,  $AB = 10$ ,  $BC = 24$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ . Найти радиус окружности.

10. В выражении  $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{1000})$  раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

**Ответы:**

1. - 19
2. - 199
3. - 401
4. - 28
5. - 141
6. - 7
7. - 128
8. - 7
9. - 5
10. - 500501

Время выполнения задания: 240 минут.

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. В треугольнике две стороны равны 25 и 23. Каким может быть наименьший радиус описанной окружности такого треугольника? (Если ответ не целый, отделяйте дробную часть точкой).
2. В детский сад завезли карточки трёх видов для обучения чтению: на некоторых написано «па», на некоторых «сть», и на некоторых «ко». Каждый из 40 учащихся детского сада взял три карточки (не обязательно разные) и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «папа» могут сложить из своих карточек 23 ребёнка, слово «пасть» — 19 детей, слово «кость» — 11 детей, слово «пакость» — 4 ребёнка. При этом каждый ребёнок может сложить хотя бы одно слово из перечисленных. Сколько детей взяли себе три карточки со слогами «па», «па», «сть»?
3. Обозначим  $S(n)$  - сумму цифр натурального числа  $n$ . Некоторое натуральное число  $N$  таково, что  $s(s(s(s(N)))) \neq s(s(s(N)))$ . Какое наименьшее количество цифр может быть в десятичной записи числа  $N$ ?
4. В треугольнике  $ABC$   $\angle A = \angle C = 9^\circ$ . На стороне  $AC$  выбраны  $n$  точек  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . (Точка  $P_i$  лежит между  $A$  и  $P_{i+1}$ .) Оказалось, что каждый из треугольников  $ABP_1, P_1BP_2, \dots, P_{n-1}BP_n, P_nBC$  - равнобедренный. Найти наибольшее возможное значение  $n$ .
5. Из множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  выбираются три **различных** натуральных числа  $a, b, c$ . Сколько способов это сделать так, чтобы число  $a^{(b^c)}$  делилось на 4?
6. В магазине поштучно продаются ананасы и кокосы. Один ананас стоит 159 руб, один кокос — 100 руб. Некто пошёл в магазин, имея с собой ровно 1999 руб, и накупил там ананасов и кокосов. Какое наименьшее количество денег (в рублях) могло у него остаться?
7. Даны два уравнения:

$$x^6 + px^3 + q = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 5x - 10^{2013} = 0.$$

Известно, что оба корня второго уравнения являются также корнями первого. Найти последние три цифры в десятичной записи числа  $p$ . (Если  $p$  не целое, найдите три цифры перед запятой.)

8. Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно разбить на несколько (больше одной) групп так, чтобы суммы цифр во всех группах были равны друг другу? (Разбиения, отличающиеся только перестановкой групп, считаются одинаковыми.)
9. В треугольнике  $ABC$  с углами  $59^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $61^\circ$  проводятся высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . В треугольнике  $A_1B_1C_1$  проводятся высоты  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  и т.д. (Каждый следующий треугольник образован основаниями высот предыдущего.) Найти наименьшее натуральное  $n$ , при котором треугольник  $A_nB_nC_n$  - тупоугольный.
10. Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении  $(1 + x^2)^{100}(1 + x^3)^{100}$ ?

**Ответы:**

1. - 12.5
2. - 9
3. - 23
4. - 6
5. - 10
6. - 4
7. - 125
8. - 10
9. - 5
10. - 499

**Время выполнения задания: 240 минут.**

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. В двух ящиках лежат белые и чёрные шары. Если из каждого ящика вынуть по одному шару, то вероятность того, что они оба окажутся белыми, равна 0.147, а вероятность того, что оба окажутся чёрными - 0.377. В одном из ящиков все чёрные шары перекрасили в белый цвет, а все белые перекрасили в чёрный цвет, после чего из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что эти шары будут одного цвета.

2. Найти наименьшее натуральное  $a > 1$ , для которого  $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$  - натуральное число.

3. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны 450 точек  $P_1, P_2, \dots, P_{450}$ . (Каждая точка  $P_i$  лежит между  $A$  и  $P_{i+1}$ , точки выбираются произвольно и могут делить сторону на отрезки различной длины.) Рассматриваются треугольники  $ABP_1, P_1BP_2, \dots, P_{449}BP_{450}, P_{450}BC$ . Какое наибольшее количество равнобедренных может быть среди них?

4. Три мотоциклиста едут по кругу с постоянными, но разными скоростями, первый и второй - по часовой стрелке, третий — против часовой стрелки, причём скорость второго больше, чем скорость первого. Они стартуют одновременно из точки  $A$ . В момент, когда второй мотоциклист проехал ровно 8 кругов (т.е. в 8-й раз вернулся в точку  $A$ ), состоялась его 3-я встреча с первым мотоциклистом и 20-я встреча с третьим. Какая по счёту встреча первого и третьего мотоциклистов произошла в этот момент? (Встречи отсчитываются после начала движения. Пребывание мотоциклистов в точке  $A$  в начальный момент времени встречей не считается.)

5. В магазине фрукты продаются только в упаковках двух видов: упаковка из 7 яблок и 17 груш стоит 100 рублей, упаковка из 18 яблок и 4 груш стоит 120 рублей. Требуется купить одинаковое (ненулевое) количество яблок и груш. Какую минимальную цену (в рублях) придётся заплатить?

6. Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  - различные корни уравнения  $x^4 - 2^{121}x^2 + 121$ , идущие в порядке возрастания, т.е.  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . Найти значение выражения

$$\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}.$$

7. Последовательность  $T_n$  определена следующим образом:  $T_1 = 2$ ,  $T_n = 2^{T_{n-1}}$  при  $n \geq 2$ . Найти остаток от деления числа  $T_1 + T_2 + \dots + T_{255}$  на 255.

8. Окружность пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $K, L$ , сторону  $BC$  — в точках  $M, N$ , сторону  $AC$  — в точках  $R, S$ . Дано:  $KL = MN = RS = 1.5$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ . Найти радиус окружности.

9. В выражении  $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots (1 + x^{2000})$  раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

10. Джек-потрошитель начинает рубить деревья, имея в начальный момент запас энергии, равный 100 единицам. За каждую минуту он может совершить одно из двух действий: либо срубить  $n$  деревьев, где  $n$  - количество единиц его энергии в начале минуты, и тогда к концу минуты его энергия уменьшается на 1, либо отдохнуть (не срубив за минуту ни одного дерева), и тогда к концу минуты его запас энергии увеличивается на 1.

Какое максимальное количество деревьев может он срубить за 60 минут?

**Ответы:**

1. - 0.476

2. - 256

3. - 451

4. - 17

5. - 1300

6. - 11

7. - 19

8. - 1.25

9. - 2001001

10. - 4293

Время выполнения задания: 240 минут.

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. В двух ящиках лежат белые и чёрные шары (в каждом ящике присутствуют шары обоих цветов). Если из каждого ящика вынуть по одному шару, то вероятность того, что они оба будут белыми, равна 0.09, а вероятность того, что оба будут чёрными, равна 0.48. Из каждого ящика извлекли столько чёрных шаров, сколько в этом ящике было белых, после чего из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
2. Найти наибольшее натуральное  $a$ , для которого  $\sqrt[6]{a^{625}}$  - натуральное число.
3. В треугольнике  $ABC$   $\angle A = \angle C = 3^\circ$ . На стороне  $AC$  выбраны  $n$  точек  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . (Точка  $P_i$  лежит между  $A$  и  $P_{i+1}$ .) Оказалось, что каждый из треугольников  $ABP_1, P_1BP_2, \dots, P_{n-1}BP_n, P_nBC$  - равнобедренный. Найти наибольшее возможное значение  $n$ .
4. Три мотоциклиста едут по кругу с постоянными, но разными скоростями в одном направлении. Они стартуют одновременно из точки  $A$ . В момент, когда второй мотоциклист проехал ровно 8 кругов (т.е. в 8-й раз вернулся в точку  $A$ ), состоялась его 11-я встреча с первым мотоциклистом и 9-я встреча с третьим. Сколько полных кругов проедет третий мотоциклист за то время, за которое первый проедет ровно 38 кругов? (Встречи отсчитываются после начала движения. Пребывание мотоциклистов в точке  $A$  в начальный момент времени встречей не считается.)
5. В группе 17 человек знают английский язык, 14 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 19 человек знает польский язык. При этом 34 человека в группе знают ровно один язык из перечисленных, а остальные - ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе?
6. Даны два уравнения:

$$x^6 + px^3 + q = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 101x - 10^{2013} = 0.$$

Известно, что оба корня второго уравнения являются также корнями первого. Найти последние три цифры в десятичной записи числа  $p$ . (Если  $p$  не целое, найдите три цифры перед запятой.)

7. Найти остаток от деления числа  $3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{241!} + 3^{242!}$  на 242.

8. В треугольнике  $ABC$  с углами  $59.7^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $60.3^\circ$  проводятся высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . В треугольнике  $A_1B_1C_1$  проводятся высоты  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  и т.д. (Каждый следующий треугольник образован основаниями высот предыдущего.) Найти наименьшее натуральное  $n$ , при котором треугольник  $A_nB_nC_n$  - тупоугольный.

9. Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении  $(1 + x^2)^{100}(1 + x^5)^{100}$ ?

10. Какое наименьшее количество точек нужно отметить строго внутри правильного восьмиугольника так, чтобы на каждой диагонали лежала хотя бы одна отмеченная точка?

**Ответы:**

1. - 0.1875

2. - 3125

3. - 8

4. - 34

5. - 52

6. - 301

7. - 92

8. - 7

9. - 697

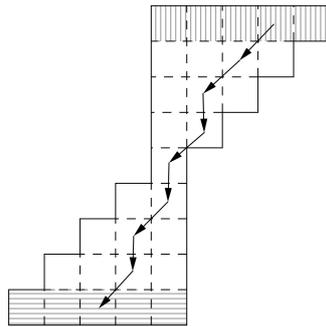
10. - 9

Время выполнения задания: 240 минут.

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны 500 точек  $P_1, P_2, \dots, P_{500}$ . (Каждая точка  $P_i$  лежит между  $A$  и  $P_{i+1}$ , точки выбираются произвольно и могут делить сторону на отрезки различной длины.) Рассматриваются треугольники  $ABP_1, P_1BP_2, \dots, P_{499}BP_{500}, P_{500}BC$ . Какое наибольшее количество равнобедренных может быть среди них?
2. В двух ящиках лежат белые и чёрные шары (в каждом ящике присутствуют шары обоих цветов). Если из каждого ящика вынуть по одному шару, то вероятность того, что они оба окажутся белыми, равна 0.115, а вероятность того, что оба окажутся чёрными — 0.405. В одном из ящиков все чёрные шары перекрасили в белый цвет, а все белые перекрасили в чёрный цвет, после чего из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что эти шары будут одного цвета.
3. В магазине фрукты продаются только в упаковках двух видов: упаковка из 23 яблок и 9 груш стоит 500 рублей, упаковка из 7 яблок и 19 груш стоит 350 рублей. Требуется купить одинаковое (ненулевое) количество яблок и груш. Какую минимальную цену (в рублях) придётся заплатить?
4. Найти количество натуральных чисел  $n \leq 10^{12}$  таких, что  $\text{НОК}(16, n) = 16n$ .
5. Три мотоциклиста едут по кругу с постоянными скоростями, первый и второй — по часовой стрелке, третий — против часовой стрелки, причём скорость второго больше чем скорость первого. Они стартуют одновременно из точки  $A$ . В момент, когда второй мотоциклист проехал ровно 7 кругов (т.е. в 7-й раз вернулся в точку  $A$ ), состоялась его 3-я встреча с первым мотоциклистом и 21-я встреча с третьим. Какая по счёту встреча первого и третьего мотоциклистов произошла в этот момент? (Встречи отсчитываются после начала движения. Пребывание мотоциклистов в точке  $A$  в начальный момент времени встречей не считается.)
6. Точка  $A$  расположена на параболе  $y = x^2$ , а точка  $B$  — на прямой  $y = x - 5.25$ . Найти минимальное возможное значение величины  $AB^2$ .

7. Приведённая ниже диаграмма состоит из 29 единичных квадратов. Лягушка из каждой клетки может прыгнуть либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку влево-вниз по диагонали (не выходя при этом за границы диаграммы). Сколько существует путей лягушки, начинающихся в одном из квадратов верхнего ряда и заканчивающихся в одном из квадратов нижнего ряда? (На рисунке показан один из путей лягушки. Верхний ряд квадратов выделен вертикальной штриховкой, нижний ряд — горизонтальной штриховкой.)



8. Окружность пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $K, L$ , сторону  $BC$  — в точках  $M, N$ , сторону  $AC$  — в точках  $R, S$ .  
 Дано:  $KL = MN = RS = 5$ ,  $AB = 18$ ,  $BC = 24$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ . Найти радиус окружности.

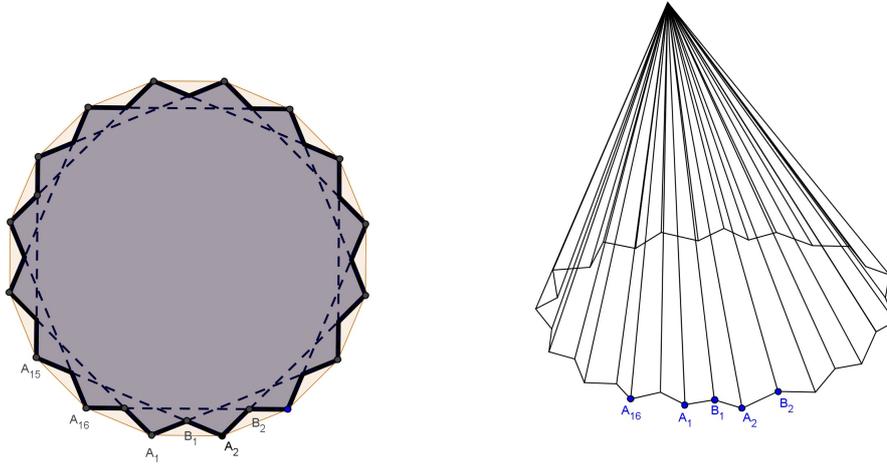
9. В выражении  $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots (1 + x^{13})(1 + x^{14})(1 + x^{1000})^{18}$  раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

**Ответы:**

1. - 501
2. - 0.48
3. - 5450
4. - 500000000000
5. - 18
6. - 12.5
7. - 256
8. - 6.5
9. - 2014
10. - 2017

10. В правильном 1007-угольнике  $A_1 \dots A_{1007}$  соединены вершины через каждые две, т.е. проведены все диагонали  $A_i A_{i+3}$  (считаем  $A_{1008} = A_1$ ,  $A_{1009} = A_2$  и т.д.) Обозначим  $B_i$  - пересечение диагоналей  $A_i A_{i+3}$  и  $A_{i+1} A_{i-2}$ . Рассмотрим пирамиду, основанием которой является многоугольник

$A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_{1007} B_{1007}$ . (На рисунке показан пример такой пирамиды, где изначально вместо 1007-угольника взят 16-угольник.) Какое наибольшее количество сторон может иметь многоугольник, получающийся в сечении этой пирамиды плоскостью?



**Время выполнения задания: 240 минут.**

*Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.*

1. В треугольнике  $ABC$   $\angle A = \angle C = 1^\circ$ . На стороне  $AC$  выбраны  $n$  точек  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . (Точка  $P_i$  лежит между  $A$  и  $P_{i+1}$ .) Оказалось, что каждый из треугольников  $ABP_1, P_1BP_2, \dots, P_{n-1}BP_n, P_nBC$  - равнобедренный. Найти наибольшее возможное значение  $n$ .

2. В двух ящиках лежат белые и чёрные шары (в каждом ящике присутствуют шары обоих цветов). Если из каждого ящика вынуть по одному шару, то вероятность того, что они оба будут белыми, равна 0.036, а вероятность того, что оба будут чёрными, равна 0.576. Из каждого ящика удалили столько чёрных шаров, сколько в этом ящике было белых, после чего из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

3. В группе 15 человек знают английский язык, 16 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 21 человек знает польский язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?

4. Целое число  $a$  и простое число  $p$  таковы, что число

$$(p - a)(p - 2a + 12)(p - 3a + 24)$$

тоже простое. Найти  $a$ .

5. Три мотоциклиста едут по кругу с постоянными, но разными скоростями в одном направлении. Они стартуют одновременно из точки  $A$ . В момент, когда второй мотоциклист проехал ровно 5 кругов (т.е. в 5-й раз вернулся в точку  $A$ ), состоялась его 6-я встреча с первым мотоциклистом и 8-я встреча с третьим. Сколько полных кругов проедет третий мотоциклист за то время, за которое первый проедет ровно 33 круга? (Встречи отсчитываются после начала движения. Пребывание мотоциклистов в точке  $A$  в начальный момент времени встречей не считается.)

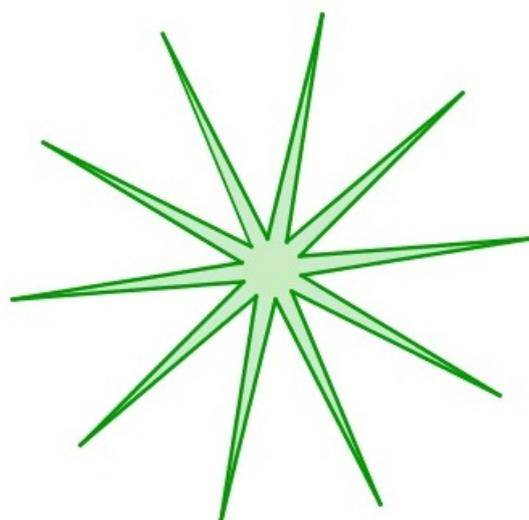
6. Точка  $A$  расположена на параболе  $y = (x + 18)^2$ , а точка  $B$  — на параболе  $y = -(x - 18)^2$ . Найти минимальное возможное значение величины  $AB^2$ .

7. Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно разбить на несколько (больше одной) групп так, чтобы суммы цифр во всех группах были равны друг другу? (Разбиения, отличающиеся только перестановкой групп, считаются одинаковыми.)

8. В треугольнике  $ABC$  с углами  $59.9^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $60.1^\circ$  проводятся высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . В треугольнике  $A_1B_1C_1$  проводятся высоты  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  и т.д. (Каждый следующий треугольник образован основаниями высот предыдущего.) Найти наименьшее натуральное  $n$ , при котором треугольник  $A_nB_nC_n$  - тупоугольный.

9. Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении  $(1 + x^3)^{100}(1 + x^4)^{100}$ ?

10. Многоугольник в форме 10-конечной звезды, изображённый на рисунке, является основанием некоторой призмы. Какое наибольшее количество сторон может иметь многоугольник, получающийся в сечении этой призмы плоскостью?



**Ответы:**

1. - 12
2. - 0.0625
3. - 26
4. - 10
5. - 39
6. - 1088
7. - 10
8. - 9
9. - 695
10. - 30