Математика **11 класс**

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Можно ли расположить на плоскости 2013 лучей таким образом, чтобы ни через какую точку плоскости не проходило более двух лучей, каждый луч пересекался ровно с двумя другими и любые две точки на любых двух лучах можно было бы соединить ломаной, целиком содержащейся в объединении этих лучей?

2. При каком значении параметра a график многочлена $x^4-6x^3+12x^2+ax$ симметричен относительно прямой $x = c$ для какого-нибудь значения константы c?

3. Через точку в пространстве проведены четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4, никакие три их которых не лежат в одной плоскости. Докажите, что существует параллелограмм, вершины которого лежат на этих прямых.

4. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b, такие что $2a^2 + 3b^2$ делится на $2a + 3b$.

5. Описанный четырехугольник $ABCD$ делится диагональю AC на два подобных, но не равных треугольника. Чему может быть равна длина диагонали AC, если длины сторон AB и CD равны 5 и 10 соответственно?

6. Класс из 20 учеников разделён на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с 4-мя одноклассниками. Найдите число различных компаний из трех учеников таких, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из оставшихся.

Ответы и указания

1. Ответ: можно.
Указание: продлите стороны выпуклого 2013-угольника.

2. Ответ: $a = -9$.
Указание: пусть $f(x)$ – многочлен из условия задачи. Сдвинем график на $-c$ вдоль оси OX. Получим график многочлена $f(x+c)$. При этом прямая $x = 0$ является осью симметрии этого многочлена, т.е. многочлен $f(x+c)$ является чётной функцией, т.е. все коэффициенты при нечётных степенях x равны 0. Раскроем скобки в выражении $f(x+c)$, сгруппируем слагаемые по степеням x и приравняем к 0 все коэффициенты при нечётных степенях x. Получим систему уравнений с неизвестными a, c, из которой находим $c = \frac{3}{2},\ a = -9$.

3. Указание: проведём плоскость через прямые $l_1,\ l_2$, и плоскость через прямые $l_3,\ l_4$. Пусть l – прямая, по которой пересекаются эти плоскости. Из условия следует, что эта прямая не совпадает ни с одной из исходных прямых. Пусть O – произвольная точка на прямой l. Существует отрезок AC, серединой которого является точка O, и концы которого лежат на прямых l_1 и l_3 (В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии, МЦНМО 2007, задача 16.15). Аналогично существует отрезок BD, серединой которого является точка O, и концы которого лежат на прямых l_2 и l_4. Тогда $ABCD$ – требуемый параллелограмм.

4. Ответ: $(1,1),\ (6,1),\ (3,8),\ (9,4)$.
Указание: из условия следует, что $3b(b-a) = ((2a^2+3b^2)-(2a^2+3ab)) \vdots (2a+3b)$. Иначе говоря, НОД$(3b(b-a),\ 2a+3b) = 2a+3b$. Докажите, что НОД$(b,\ 2a+3b)$ может равняться только 1 или 2, а НОД$(b-a,\ 2a+3b)$ =НОД$(b-a,\ 5a)$ может равняться только 1 или 5. Выведите отсюда, что НОД$(3b(b-a),\ 2a+3b)$ может равняться только одному из чисел $1, 2, 3, 5, 6, 15, 30$. Приравнивая $2a+3b$ к каждому из этих чисел и учитывая взаимную простотоу a и b, переберите все варианты.

5. Ответ: $5\sqrt{2}$ или 6.
Указание: пусть $AC = y,\ AD = x$. Тогда $BC = 15 - x$. Рассматривая разные случаи подобия, исключите все кроме двух: $ABC \sim CAD$ и $ABC \sim DCA$. В первом случае из пропорциональности сторон получаем $x = 30-15\sqrt{2},\ y = 5\sqrt{2}$. Во втором случае $x = 12,\ y = 6$. (Для полноты решения следует ещё доказать, что 4-угольники, получающиеся в каждом из этих случаев, являются выпуклыми.)

6. Ответ: 450.
Указание: общее число троек учеников равно $C_{20}^3 = 1140$. Вычислим неподходящие тройки, т.е. такие, в которых не все три ученика дружат друг с другом, но

какие-то двое обязательно дружат. Пусть (a, b, c) – такая неподходящая тройка. Тогда в ней есть ровно два "особых" ученика, каждый из которых дружит ровно с одним из оставшихся. Значит посчитав количество "особых" учеников во всех тройках и разделив на два, мы получим количество неподходящих троек. (В подходящих тройках "особых" учеников нет).
Если ученик из первой половины класса, то он будет особым в $(20-6-1)\cdot 6 = 78$ тройках, если же он из второй половины, то он будет особым в $(20-4-1)\cdot 4 = 60$ тройках. Значит количество особых учеников в тройках равно $(78\cdot 10+60\cdot 10) = 1380$, а количество подходящих троек равно $1140 - 1380/2 = 450$.