1. Могут ли ненулевые числа x, y и z удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+x=y^2-y, \\ y^2+y=z^2-z, \\ z^2+z=x^2-x? \end{cases}$$

Ответ. Не могут.

Решение. Перенесём все члены первого уравнения в одну часть и разложим получившееся на множители:

$$(x+y)(x-y+1)=0. \qquad (*)$$

Также сложим все три уравнения:

$$x+y+z=0.$$

Т.к. числа x, y, z не равны нулю, числа $x+y$, $y+z$, $z+x$ тоже не равны нулю. Поэтому $x-y+1=0$, аналогично $y-z+1=0$ и $z-x+1=0$. Сложив последние три равенства, получаем, что $3=0$. Противоречие.

Критерии.

(−/+) Уравнения приведены к виду $(*)$,
или
доказано $x+y+z=0$,
или
утверждение задачи доказано, но в процессе доказательства используется сокращение на $x+y$ без обоснования, что $x+y\neq 0$.

(+/−) Уравнения приведены к виду $(*)$ и доказано $x+y+z=0$.

2. Действительные числа a, b и c таковы, что числа ab, bc, ca — рациональные. Докажите, что существуют такие целые числа x, y, z, что $ax + by + cz = 0$.

Решение. К сожалению, в условии была пропущена фраза «не равные одновременно нулю», поэтому задача имеет тривиальное решение $x = y = z = 0$.
В задаче, которая подразумевалась, числа x, y, z, не должны были равняться одновременно 0. В таком случае задача имеет следующее решение:

Если ни одно из чисел a, b, c не равно 0, то рассмотрим числа:

$$x = 2bc, y = -ca, z = -ab.$$

Эти числа рациональны и не равны 0, и для них равенство $ax + by + cz = 0$ выполнено. Домножим их на их общий знаменатель. Они станут целыми, и равенство нулю нужного выражения сохранится.
Если же одно из чисел a, b, c равно 0, например $a = 0$, то положим $y = z = 0$, $x = 1$.

Критерии.

(−/+) Решения нет, но имеются частичные продвижения: скажем, указано, что x,y,z должны быть корнями из рациональных чисел.

(+/2) Не указано, что $x = y = z = 0$ – решение; ход решения в целом верный, но присутствуют необоснованные утвержения.

(+/−) Правильный ответ с обоснованием (в том числе ответ $x = y = z = 0$), но помимо этого в решении присутствуют неверные утверждения.

(+.) Правильный ответ с обоснованием (в том числе ответ $x = y = z = 0$), но в решении присутствуют необоснованные верные утверждения.

(+) Указано, что $x = y = z = 0$ – решение (без дальнейших неверных или необоснованных утверждений),
или
любое другое правильное и полностью обоснованное решение.

3. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке $(11;\ 1)$ пересекает это множество в точках A, B, C и D. Докажите, что все точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т.е. на кривой, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

Ответ. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$.

Решение. Координаты точек A, B, C, D являются решениями системы

$$\begin{cases} y^2 = x \\ (x-11)^2 + (y-1)^2 = 25. \end{cases} \qquad (1)$$

Раскрывая скобки во втором уравнении и подставляя y^2 из первого, получаем уравнение-следствие

$$x^2 - 22x + 121 + x - 2y + 1 = 25 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}. \qquad (2)$$

Любое решение системы (1) является решением уравнения (2). В частности координаты точек A, B, C, D являются решениями уравнения (2), т.е. парабола, задаваемая уравнением (2), проходит через точки A, B, C, D.

Критерии.

(−.) Правильно выписано уравнение окружности.

(−/+) В процессе решения получено верное уравнение параболы, однако затем написаны лишние и некорректные рассуждения, приводящие к неверному ответу.

(+/2) Ответ верный, обоснования нет,

или

В предположении, что нужная парабола существует, найдены только два из коэффициентов a,b,c. Существование параболы с нужными свойствами не доказано.

(+/−) Получен верный ответ при предположении, что нужная парабола существует, однако ее существование либо не доказано, либо доказано с существенными пробелами,

или

уравнение $x = y^2$ заменено на уравнение $\sqrt{x} = y$, других недочетов нет, ответ верный,

или

доказано, что точки A, B, C, D лежат на одной параболе, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, однако коэффициенты a, b, c не найдены.

(+.) Арифметическая ошибка в правильном решении.

(+) В ответе явно выписано правильное уравнение параболы, и приведено корректное обоснование того, что эта парабола проходит через точки A, B, C, D.

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая AO пересекает сторону BC в точке P. Точки E и F на сторонах AB и AC соответственно выбираются так, что около четырёхугольника $AEPF$ можно описать окружность. Докажите, что длина проекции отрезка EF на сторону BC не зависит от выбора точек E и F.

Решение. Продолжим EF до пересечения со стороной BC в точке M, и пусть γ – острый угол между указанными прямыми в точке M. Тогда проекция отрезка EF на сторону BC равна $|EF|\cos\gamma$ (если $EF \parallel BC$, то полагаем $\gamma = 0$). Далее, пусть $\angle BAO = \alpha$ и $\angle CAO = \beta$, а прямая AO пересекает окружность S_{ABC}, описанную вокруг $\triangle ABC$, в точке N. Теперь заметим, что $\angle PCN = \alpha$ и $\angle PBN = \beta$ (по свойству вписанных углов в окружность S_{ABC}). По той же причине $\angle PEF = \beta$ и $\angle PFE = \alpha$.

Опустим перпендикуляр FD из точки F на сторону BC. Тогда $\angle CFD = \alpha$ по теореме об углах с взаимно-перпендикулярными сторонами, если её применить к углу CFD и углу DCN (напомним, что AN – диаметр окружности S_{ABC}!). Если через F обозначить угол при вершине F в $\triangle EAF$, то из прямоугольного треугольника FMD сразу получаем, что $\cos\gamma = \sin(\alpha + F)$.

Но $\angle PFA = F + \angle PFE = F + \alpha$. Рассмотрим, наконец, окружность, описанную вокруг четырехугольника $AEPF$. Если её радиус равен r, то по теореме синусов $EF = 2r\sin A$ и $AD = 2r\sin(F+\alpha)$. Следовательно, $EF\cos\gamma = EF\sin(\alpha+F) = 2r\sin A\cdot\sin(F+\alpha) = AP\sin A$, что от положения точек E и F не зависит.

Критерии.

(−/+) Найдена длина проекции для частного случая особого расположения точек E и F на сторонах угла A. (Например $\angle AFP = 90°$.)

(+/2) написана формула, выражающая проекцию через косинус угла между EF и BC, и получена связь этого угла с углами треугольника.

(+.) Арифметическая ошибка, не влияющая на ответ.

5. На плоскости даны восемь различных точек. Нумерацию этих точек числами от 1 до 8 назовём *хорошей*, если выполнено следующее условие:

существует такая прямая, что все точки лежат по одну сторону и на разных расстояниях от неё, и при этом расстояния от точек до этой прямой возрастают с возрастанием номера. Т.е. ближайшая точка — номер 1, следующая по удалённости — номер 2, и т.д.

Какое максимальное количество различных хороших нумераций может быть у заданной восьмёрки точек?

Ответ. $2C_8^2 = 56$.

Решение. Заметим, что при нумерации точек от прямой нас интересуют только её направление и то, с какой стороны от неё находятся точки. Всю эту информацию можно однозначно восстановить из единичной нормали к ней, направленной к точкам. Поэтому нумерация восьмёрки получается из вектора единичной длины. Запараметризуем такие векторы точками окружности.

На время рассмотрим лишь две точки A и B из восьмёрки. Этим двум точкам можно сопоставить две противоположные точки окружности: две нормали к прямой AB. Окружность разбилась на две дуги. Ясно, что нумерация A и B на одной дуге получается одна и та же, на другой дуге — оставшаяся.

Далее отметим, что нумерацию можно однозначно восстановить по тому, в каком порядке находится каждая отдельно взятая пара. Поэтому, если отметить на окружности все получившиеся C_8^2 пары противоположных точек, на каждой из получившихся дуг нумерация будет фиксирована. Следовательно, для любой восьмёрки точек нумераций будет не больше, чем количество дуг, т.е. не больше, чем $2C_8^2$. С другой стороны, мы можем представить себе достаточно общую восьмёрку точек, для которой никакие пары противоположных точек не совпадают. Тогда окружность разобьётся в точности на $2C_8^2$ дуг. Наконец, любые две дуги можно будет разделить какой-то парой противоположных точек, значит, на любых двух разных дугах нумерация отличается. Значит, $2C_8^2$ достижимо.

Критерии.

- (−.) Правильно найдено и обосновано число нумераций для какой-либо немаксимальной конфигурации.
- (−/+) Верные рассуждения, не приведшие к правильному ответу изза незначительной ошибки.
- (+/2) Правильный ответ + существенные продвижения в обосновании.
- (+/−) Полностью доказано, что 56 реализуется, *или* что больше 56 не бывает.
- (+) Полностью доказано, что 56 реализуется, а больше 56 - нет.

6. Пусть $p > 2$ — целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \frac{p}{2},$$

и произведение

$$\frac{p-a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p-a_2}{|a_2|} \cdots \frac{p-a_k}{|a_k|}$$

равно 3^m для некоторого натурального m.

Решение. <u>ПЕРВЫЙ СПОСОБ.</u> Возьмём в качестве чисел a_i все числа из интервала $(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ такие, что $p \equiv a_i (\mod 3)$. Докажем, что они удовлетворяют условию задачи. Заметим следующее:

- Все числа $|a_i|$ принадлежат интервалу $(0, \frac{p}{2})$.
- Все числа $|a_i|$ различны. Действительно, если $a_i = -a_j$ при некоторых i, j, то $a_i + a_j = 0 \Rightarrow 2p = 0 (\mod 3)$ – противоречие.
- Любое число из интервала $(0, \frac{p}{2})$, не делящееся на 3, совпадает с одним из чисел $|a_i|$. Действительно, пусть $t \in (0, \frac{p}{2})$, $t \not\vdots 3$. Тогда либо $t \equiv p (\mod 3)$, либо $-t \equiv p (\mod 3)$ и, следовательно, одно из чисел $\pm t$ совпадает с одним из a_i. Из $\pm t = a_i$ и $t > 0$ следует $t = |a_i|$.

Итак, множество чисел $|a_i|$ совпадает с множеством всех чисел из интервала $(0, \frac{p}{2})$, не делящихся на 3.

Далее, пусть 3^{γ_i} — максимальная степень тройки, делящая $(p - a_i)$, т.е.

$$p - a_i = 3^{\gamma_i} \cdot b_i, \quad b_i \not\vdots 3.$$

Из $p \equiv a_i (\mod 3)$ следует $\gamma_i > 0$. Заметим следующее:

- Все числа b_i принадлежат интервалу $(0, \frac{p}{2})$. Действительно,
$$-\frac{p}{2} < a_i < \frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} < p - a_i < \frac{3p}{2} \Rightarrow 0 < \frac{p-a_i}{3^{\gamma_i}} < \frac{p}{2}.$$
- Все числа b_i различны. Действительно, пусть $b_i = b_j$ при некоторых i, j. Поскольку $p - a_i \neq p - a_j$, отсюда следует $\gamma_i \neq \gamma_j$. Пусть $\gamma_i > \gamma_j$. Тогда
$$\frac{p-a_i}{p-a_j} = \frac{3^{\gamma_i} \cdot b_i}{3^{\gamma_j} \cdot b_j} = 3^{\gamma_i - \gamma_j} \geq 3.$$
С другой стороны $\frac{p}{2} < p - a_j$, $\frac{3p}{2} > p - a_i \Rightarrow \frac{p-a_i}{p-a_j} < 3$ – противоречие.
- Любое число из интервала $(0, \frac{p}{2})$, не делящееся на 3, совпадает с одним из чисел b_i. Действительно, пусть $t \in (0, \frac{p}{2})$, $t \not\vdots 3$. Тогда существует такое $\gamma \in \mathbb{N}$, что $t \cdot 3^\gamma \in (\frac{p}{2}, \frac{3p}{2}) \Rightarrow p - t \cdot 3^\gamma \in (-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$, и при этом $p - t \cdot 3^\gamma \equiv p (\mod 3)$, следовательно $p - t \cdot 3^\gamma = a_i$ при некотором i. Но тогда $t \cdot 3^\gamma = p - a_i \Rightarrow t = b_i$.

Итак, множество чисел b_i совпадает с множеством всех чисел из интервала $(0, \frac{p}{2})$, не делящихся на 3 и, следовательно, совпадает с множеством чисел $|a_i|$.

Отсюда получаем

$$\frac{p-a_1}{|a_1|}\cdot\frac{p-a_2}{|a_2|}\cdots\frac{p-a_k}{|a_k|}=\frac{3^{\gamma_1+\dots+\gamma_k}\cdot b_1\cdot b_2\cdot\dots\cdot b_k}{|a_1|\cdot\dots\cdot|a_k|}=3^{\gamma_1+\dots+\gamma_k},$$

что и требовалось.

ВТОРОЙ СПОСОБ. Из условия следует, что p — число вида $6n\pm1$, $6n\pm2$, $n\in\mathbb{N}$. Рассмотрим случай $p=6n+1$, в остальных случаях вычисления аналогичны.

Положим $a_i=3n+1-3i,\ i=1,2,\dots,2n$. Тогда $\frac{p}{2}>3n-2=a_1>a_2>\dots>a_{2n}=-3n+1>-\frac{p}{2}$. Вычислим значение выражения:

$$\prod_{i=1}^{2n}\frac{p-a_i}{|a_i|}=\prod_{i=1}^{2n}\frac{6n+1-(3n+1-3i)}{|3n+1-3i|}=3^{2n}\prod_{i=1}^{2n}\frac{n+i}{|3n+1-3i|}=$$

$$=\frac{3^{2n}\cdot\prod\limits_{i=1}^{2n}(n+i)}{\prod\limits_{i=1}^{2n}|3n+1-3i|}=\frac{3^{2n}\cdot(3n)!}{n!\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}(3n+1-3i)\prod\limits_{i=n+1}^{2n}(3i-3n-1)}=$$

$$=\frac{3^{3n}\cdot(3n)!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(3i)\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}(3i-2)\prod\limits_{i=1}^{n}(3i-1)}=\frac{3^{3n}\cdot(3n)!}{(3n)!}=3^{3n}.$$

Критерии.

(–.) Замечено, что числа из интервала $(-\frac{p}{2},\ \frac{p}{2})$ такие, что $p\equiv a_i(\mod 3)$, дают решение задачи.

(+.) Явно разобран один из случаев $p=6n\pm1,\ 6n\pm2$.