Математика **11 класс**

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке (11; 1) пересекает это множество в точках A, B, C и D. Докажите, что все точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т.е. на кривой, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

2. Через вершины правильного шестиугольника проведены 6 различных параллельных прямых. Может ли оказаться так, что все попарные расстояния между этими прямыми являются целыми числами?

3. Последовательность a_n строится следующим образом: $a_1,\ a_2$ — произвольные действительные числа, при $n \geq 3$ число a_n равно наименьшему из чисел $|a_i - a_j|$, $1 \leq i < j \leq n-1$. Например, если $a_1 = 6,\ a_2 = \frac{19}{2}$, то получаем последовательность $6,\ \frac{19}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{5}{2},\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\ldots$. При некотором выборе $a_1,\ a_2$ получилась последовательность, в которой $a_{10} = 1$. Найдите наименьшее возможное значение a_3 в такой последовательности.

4. Многогранник вписан в сферу радиуса R, а его объем численно равен площади его поверхности.

a. Докажите, что $R > 3$.

b. Может ли R быть больше 1000?

5. Пусть $p > 2$ — целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа a_1, a_2, …, a_k, что

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \frac{p}{2},$$

и произведение

$$\frac{p-a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p-a_2}{|a_2|} \cdots \frac{p-a_k}{|a_k|}$$

равно 3^m для некоторого натурального m.

6. На клетчатой доске размером $2 \times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону.) Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной.
Пусть A_n — количество правильных раскрасок с чётным числом закрашенных клеток, B_n — количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найти все возможные значения $A_n - B_n$.