За каждое решение выставляется первичная оценка в виде одного из следующих знаков: (+), (+.), (+/−), (+/2), (−/+), (−.), (−), (0), которая затем пересчитывается в итоговую оценку – от 0 до 20 баллов. Во всех задачах первичная оценка (0) ставится за отсутствие в беловике текста решения, оценка (-) ставится, если текст решения не соответствует ни одному из перечисленных ниже критериев.

1. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке (11; 1) пересекает это множество в точках A, B, C и D. Докажите, что все точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т.е. на кривой, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

Ответ. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$.

Решение. Координаты точек A, B, C, D являются решениями системы

$$\begin{cases} y^2 = x \\ (x-11)^2 + (y-1)^2 = 25. \end{cases} \tag{1}$$

Раскрывая скобки во втором уравнении и подставляя y^2 из первого, получаем

$$x^2 - 22x + 121 + x - 2y + 1 = 25 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}. \tag{2}$$

Поскольку уравнение (2) получено как следствие системы (1), любое решение системы (1) является решением уравнения (2). В частности координаты точек A, B, C, D являются решениями уравнения (2), т.е. парабола, задаваемая уравнением (2), проходит через точки A, B, C, D.

Критерии.

(−.) Правильно выписано уравнение окружности.

(−/+) В процессе решения получено верное уравнение параболы, однако затем написаны лишние и некорректные рассуждения, приводящие к неверному ответу.

(+/2) Ответ верный, обоснования нет,
или
В предположении, что нужная парабола существует, найдены только два из коэффициентов a,b,c. Существование параболы с нужными свойствами не доказано.

(+/−) Получен верный ответ при предположении, что нужная парабола существует, однако ее существование либо не доказано, либо доказано с существенными пробелами,
или
уравнение $x = y^2$ заменено на уравнение $\sqrt{x} = y$, других недочетов нет, ответ верный,
или
доказано, что точки A, B, C, D лежат на одной параболе, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, однако коэффициенты a, b, c не найдены.

(+.) Арифметическая ошибка в правильном решении.

(+) В ответе явно выписано правильное уравнение параболы, и приведено корректное обоснование того, что эта парабола проходит через точки A, B, C, D.

2. Через вершины правильного шестиугольника проведены 6 различных параллельных прямых. Может ли оказаться так, что все попарные расстояния между этими прямыми являются целыми числами?

Ответ. Может.

Решение. Пусть $ABCDEF$ — произвольный правильный шестиугольник. Проведём прямую m_A через вершину A и точку G – середину стороны BC. Через остальные вершины проведём прямые, параллельные m_A. Обозначим эти прямые m_B, m_C.... Опустим перпендикуляры DS, CR, BP, CQ (см. рисунок).

Будем обозначать $\rho(x, y)$ расстояние между прямыми x и y. Пусть $\rho(m_A, m_B) = d$. Тогда:

$BG = CG \Rightarrow BP = CQ \Rightarrow \rho(m_A, m_C) = \rho(m_A, m_B) = d$,

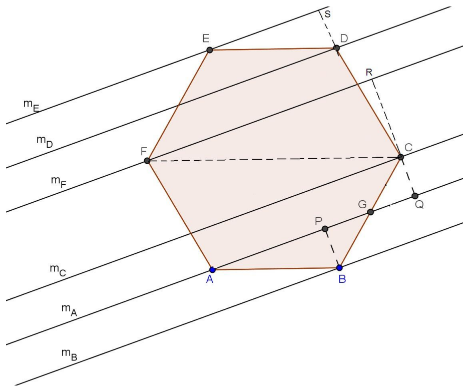
при симметрии относительно центра шестиугольника прямые m_A, m_B, m_C переходят соответственно в m_D, m_E, m_F, откуда $\rho(m_D, m_E) = \rho(m_D, m_F) = d$,

$\triangle FCR \sim \triangle EDS,\ FC = 2ED \Rightarrow \rho(m_C, m_F) = CR = 2DS = 2d.$

Сделаем теперь гомотетию с коэффициентом $\frac{1}{d}$, (иначе говоря выберем сторону шестиугольника так, чтобы $d = 1$). Тогда

$$\rho(m_D, m_E) = \rho(m_D, m_F) = \rho(m_A, m_C) = \rho(m_A, m_B) = 1, \quad \rho(m_F, m_C) = 2,$$

т.е. все попарные расстояния между прямыми — целые числа.



Критерии.

(−.) Правильный ответ, сопровождаемый правильным рисунком (с явным указанием равных или пропорциональных отрезков),
или
указано, что какие-то два расстояния между прямыми, симметричными относительно центра шестиугольника, можно сделать одновременно целыми.

(−/+) Доказано, что два расстояния между несимметричными парами прямых можно сделать одновременно целыми.

(+/2) Верный ход решения с логическими ошибками или недостаточными обоснованиями, не повлиявшими на ответ.

(+/−) Верный ход решения с арифметической ошибкой, не повлиявшей на ответ.

(+.) Верное решение с незначительными недочётами.

(+) Верное решение.

3. Последовательность a_n строится следующим образом: $a_1,\ a_2$ — произвольные действительные числа, при $n \geq 3$ число a_n равно наименьшему из чисел $|a_i - a_j|$, $1 \leq i < j \leq n-1$. Например, если $a_1 = 6,\ a_2 = \frac{19}{2}$, то получаем последовательность $6,\ \frac{19}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{5}{2},\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\ldots$. При некотором выборе $a_1,\ a_2$ получилась последовательность, в которой $a_{10} = 1$. Найдите наименьшее возможное значение a_3 в такой последовательности.

Решение. Пусть S_n — множество всех чисел $|a_i - a_j|$, $1 \leq i < j \leq n-1,\ \ n \geq 3$. Тогда a_n есть наименьшее число из множества S_n. Поскольку $S_n \subset S_{n+1}$, то $a_n \geq a_{n+1}$, т.е. начиная с a_3 последовательность нестрого убывающая. Следовательно $a_9 \geq a_{10} = 1$. Далее из определения последовательности следует $a_{10} \leq |a_8 - a_9| = a_8 - a_9 \Rightarrow a_8 \geq a_9 + a_{10} \geq 2$. Аналогично $a_7 \geq a_8 + a_9 \geq 2 + 1 = 3,\ a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 3 + 2 = 5, \ldots, a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 13 + 8 = 21$. Это значение достигается, если взять $a_1 = 55,\ a_2 = 34$.

Критерии.

(−.) Строго доказано, что $a_n \geq a_{n+1}$ при $n \geq 3$.

(−/+) Ответ + неполный пример: сказано, что $\min(a_3) = 21$, и для этого случая выписаны все члены последовательности кроме a_1, a_2.

(+/2) ответ+пример (включая $a_1,\ a_2$),

или

доказано, что $a_3 \geq 21$, но при этом без доказательства использовано, что $a_n \geq a_{n+1}$, пример последовательности для $a_3 = 21$ отсутствует,

или

ответ + неполный пример (без $a_1,\ a_2$) + существенные продвижения в обосновании минимальности.

(+/−) Строго без недочётов доказано, что $a_3 \geq 21$, пример отсутствует,

или

ответ + пример (включая $a_1,\ a_2$) + обоснование минимальности с небольшими пробелами.

(+.) Логически верное и законченное решение с отсутствием каких-либо недочётов кроме следующих:

– неполный пример (не выписаны явно $a_1,\ a_2$),

– используется без доказательства тот факт, что $a_n \geq a_{n+1}$ при $n \geq 3$,

– допущена арифметическая ошибка при вычислении a_3.

(+) Строго без недочётов доказано, что $a_3 \geq 21$, и явно выписаны $a_1,\ a_2$, при которых $a_3 = 21$.

4. Многогранник вписан в сферу радиуса R, а его объем численно равен площади его поверхности.

a. Докажите, что $R > 3$.

b. Может ли R быть больше 1000?

Решение.

Решение пункта **a**:

Пусть O — центр сферы, S — площадь поверхности многогранника, V — его объём. Пронумеруем грани многогранника числами от 1 до n. Для каждого i можно образовать пирамиду с вершиной O и основанием, совпадающим с i-той гранью многогранника. Обозначим через V_i объём такой пирамиды, через S_i — площадь основания, h_i – высота, опущенная из O на основание. Тогда

$$V \leq \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} h_i S_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} R S_i = \frac{1}{3} RS.$$

Так как $V = S$, получаем, что $1 < \frac{1}{3}R \Rightarrow R > 3$.

Решение пункта **b**:

Может. Возьмём прямоугольный параллелепипед $3000 \times 3000 \times x$. Он вписан в сферу, очевидно, её радиус не меньше 1500. Осталось подобрать x так, чтобы объём был равен площади поверхности. Для этого достаточно, чтобы выполнилось равенство:

$$9000000x = 18000000 + 12000x.$$

Очевидно, при каком-то положительном x оно выполняется.

Критерии. Полное решение пункта **a** оценивается в 4 первичных балла, пункта **b** – в 2 первичных балла. Оценка задачи равна сумме баллов по обоим пунктам. Перевод в знаки осуществляется по таблице

0	1	2	3	4	5	6
0/−	−.	−/+	+/2	+/−	+.	+

Критерии за пункт **a**:

- 0: Центр сферы соединён с вершинами многогранника, других продвижений нет.
- 1: Требуемое неравенство доказано для частного случая (куб, призма, пирамида и т.д.)
- 2: Задача решена, но при решении использовано изопериметрическое неравенство,

  или

  в решении содержатся лишние и неверные утверждения, при исключении которых оставшаяся часть представляет собой верное и законченное решение. (Например сказано, что все получившиеся пирамиды — правильные.)
- 3: Упущен случай, когда центр сферы вне многогранника, в остальном всё верно.
- 4: Правильное без недочётов решение пункта **a**.

Критерии за пункт **b**:

- 0: Любые рассуждения без упоминания явного вида многогранника.
- 1: Указан конкретный вид многогранника (параллелепипед, призма и т.д.), и есть правильное но незавершённое (либо завершённое, но с ошибками) доказательство того, что при некоторых длинах рёбер требуемое равенство выполнено.
- 2: Правильное решение пункта **b**, возможно с арифметической ошибкой при подсчёте объёма или площади поверхности.

5. Пусть $p > 2$ — целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \frac{p}{2},$$

и произведение

$$\frac{p-a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p-a_2}{|a_2|} \cdots \frac{p-a_k}{|a_k|}$$

равно 3^m для некоторого натурального m.

Решение. ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Возьмём в качестве чисел a_i все числа из интервала $(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ такие, что $p \equiv a_i(\mod 3)$. Докажем, что они удовлетворяют условию задачи. Заметим следующее:

- Все числа $|a_i|$ принадлежат интервалу $(0, \frac{p}{2})$.
- Все числа $|a_i|$ различны. Действительно, если $a_i = -a_j$ при некоторых i, j, то $a_i + a_j = 0 \Rightarrow 2p = 0(\mod 3)$ – противоречие.
- Любое число из интервала $(0, \frac{p}{2})$, не делящееся на 3, совпадает с одним из чисел $|a_i|$. Действительно, пусть $t \in (0, \frac{p}{2})$, $t \not\vdots 3$. Тогда либо $t \equiv p(\mod 3)$, либо $-t \equiv p(\mod 3)$ и, следовательно, одно из чисел $\pm t$ совпадает с одним из a_i. Из $\pm t = a_i$ и $t > 0$ следует $t = |a_i|$.

Итак, множество чисел $|a_i|$ совпадает с множеством всех чисел из интервала $(0, \frac{p}{2})$, не делящихся на 3.

Далее, пусть 3^{γ_i} — максимальная степень тройки, делящая $(p - a_i)$, т.е.

$$p - a_i = 3^{\gamma_i} \cdot b_i, \quad b_i \not\vdots 3.$$

Из $p \equiv a_i(\mod 3)$ следует $\gamma_i > 0$. Заметим следующее:

- Все числа b_i принадлежат интервалу $(0, \frac{p}{2})$. Действительно,
$$-\frac{p}{2} < a_i < \frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} < p - a_i < \frac{3p}{2} \Rightarrow 0 < \frac{p-a_i}{3^{\gamma_i}} < \frac{p}{2}.$$
- Все числа b_i различны. Действительно, пусть $b_i = b_j$ при некоторых i, j. Поскольку $p - a_i \neq p - a_j$, отсюда следует $\gamma_i \neq \gamma_j$. Пусть $\gamma_i > \gamma_j$. Тогда
$$\frac{p-a_i}{p-a_j} = \frac{3^{\gamma_i} \cdot b_i}{3^{\gamma_j} \cdot b_j} = 3^{\gamma_i - \gamma_j} \geq 3.$$
С другой стороны $\frac{p}{2} < p - a_j$, $\frac{3p}{2} > p - a_i \Rightarrow \frac{p-a_i}{p-a_j} < 3$ – противоречие.
- Любое число из интервала $(0, \frac{p}{2})$, не делящееся на 3, совпадает с одним из чисел b_i. Действительно, пусть $t \in (0, \frac{p}{2})$, $t \not\vdots 3$. Тогда сущестует такое $\gamma \in \mathbb{N}$, что $t \cdot 3^\gamma \in (\frac{p}{2}, \frac{3p}{2}) \Rightarrow p - t \cdot 3^\gamma \in (-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$, и при этом $p - t \cdot 3^\gamma \equiv p(\mod 3)$, следовательно $p - t \cdot 3^\gamma = a_i$ при некотором i. Но тогда $t \cdot 3^\gamma = p - a_i \Rightarrow t = b_i$.

Итак, множество чисел b_i совпадает с множеством всех чисел из интервала $(0, \frac{p}{2})$, не делящихся на 3 и, следовательно, совпадает с множеством чисел $|a_i|$. Отсюда получаем

$$\frac{p-a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p-a_2}{|a_2|} \cdots \frac{p-a_k}{|a_k|} = \frac{3^{\gamma_1+\cdots+\gamma_k} \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_k}{|a_1| \cdot \cdots \cdot |a_k|} = 3^{\gamma_1+\cdots+\gamma_k},$$

что и требовалось.

ВТОРОЙ СПОСОБ. Из условия следует, что p — число вида $6n \pm 1$, $6n \pm 2$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим случай $p = 6n + 1$, в остальных случаях вычисления аналогичны.

Положим $a_i = 3n+1-3i,\ i = 1, 2, \dots, 2n$. Тогда $\frac{p}{2} > 3n-2 = a_1 > a_2 > \dots > a_{2n} = -3n+1 > -\frac{p}{2}$. Вычислим значение выражения:

$$\prod_{i=1}^{2n} \frac{p-a_i}{|a_i|} = \prod_{i=1}^{2n} \frac{6n+1-(3n+1-3i)}{|3n+1-3i|} = 3^{2n} \prod_{i=1}^{2n} \frac{n+i}{|3n+1-3i|} =$$

$$= \frac{3^{2n} \cdot \prod\limits_{i=1}^{2n} (n+i)}{\prod\limits_{i=1}^{2n} |3n+1-3i|} = \frac{3^{2n} \cdot (3n)!}{n! \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} (3n+1-3i) \prod\limits_{i=n+1}^{2n} (3i-3n-1)} =$$

$$= \frac{3^{3n} \cdot (3n)!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (3i) \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} (3i-2) \prod\limits_{i=1}^{n} (3i-1)} = \frac{3^{3n} \cdot (3n)!}{(3n)!} = 3^{3n}.$$

Критерии.

(–.) Замечено, что числа из интервала $(-\frac{p}{2},\ \frac{p}{2})$ такие, что $p \equiv a_i (\mod 3)$, дают решение задачи .

(+.) Явно разобран один из случаев $p = 6n \pm 1,\ 6n \pm 2$.

6. На клетчатой доске размером $2\times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону.) Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной.

Пусть A_n — количество правильных раскрасок с чётным числом закрашенных клеток, B_n — количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найти все возможные значения $A_n - B_n$.

Ответ. ± 1.

Решение. Рассмотрим клетчатые доски двух видов: обычная доска F_n размера $2\times n$, и доска G_n размера $2 \times n$, в которой удалена одна угловая клетка. Помимо величин A_n и B_n введём величины C_n и D_n - количество правильных раскрасок доски G_n с чётным и нечётным количеством раскрашенных клеток.

Клетки будем нумеровать как в шахматах: a_i, b_i, где a, b - буквы, соответствующие рядам, $i \in \{1, \ldots, n\}$ - номера столбцов. Пусть на доске F_n $(n \geq 2)$ правильным способом раскрашено чётное количество клеток. Множество таких раскрасок разбивается на три подмножества: 1) клетка a_n закрашена, 2) клетка b_n закрашена, 3) ни одна из клеток a_n, b_n не закрашена.

Если закрашена клетка a_n, то клетки a_{n-1} и b_n обязаны быть не закрашенными, а среди остальных правильным образом должны быть закрашены нечётное количество клеток. Значит, количество раскрасок, соответствующих случаю 1) (а так же и случаю 2)), равно D_{n-1}.

Если ни одна из клеток a_n, b_n не закрашена, то среди остальных правильным образом должны быть закрашены чётное количество клеток. Количество таких раскрасок равно A_{n-1}. В итоге получаем

$$A_n = A_{n-1} + 2D_{n-1}.$$

Аналогичным рассуждением получаем

$$B_n = B_{n-1} + 2C_{n-1},$$

$$C_n = A_{n-1} + D_{n-1},$$

$$D_n = B_{n-1} + C_{n-1}.$$

Обозначим $P_n = A_n - B_n,\ Q_n = C_n - D_n$. Тогда, вычитая полученные выше равенства, получаем

$$P_n = P_{n-1} - 2Q_{n-1}, \quad Q_n = P_{n-1} - Q_{n-1}.$$

Вычисляя начальные значения $P_1 = -1,\ Q_1 = 0$, находим последовательно

$$\begin{array}{cccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P_i & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ Q_i & 0 & -1 & 0 & 1 & 0. \end{array}$$

Далее последовательность становится периодической. Отсюда видно, что искомая величина P_n принимает только значения ± 1.

Критерии.

(−.) Правильный ответ на основании нескольких примеров.
(−/+) Правильный ответ с ошибками в обосновании рекурсии.
(+/2) Правильный ответ с заметными пробелами в обосновании рекурсии.
(+/−) Правильный ответ (или $\{0,\ -2\}$) с небольшими недочётами в обосновании рекурсии.

(+.) Забыта пустая раскраска, изза чего получен ответ $\{0,\ -2\}$, в остальном всё верно.

(+) Правильный ответ с полным обоснованием.