

Демонстрационный вариант и методические рекомендации  
По направлению "Прикладная математика и информатика",  
Программа "Науки о данных"

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполнения задания 240 минут.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Сколько решений, удовлетворяющих начальному условию  $y(1) = 2013$ , имеет дифференциальное уравнение

$$(y')^2 + \frac{y'yx}{\cos x} + y \operatorname{tg} x + \frac{y' \sin x}{x} = 0,$$

2. Доопределите функцию

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{1 - \cos x + x \ln(1 - x)}$$

по непрерывности в 0 и вычислите в этой точке значение 1-й и 2-й производной.

3. Сколькими способами вершины куба можно раскрасить в восемь данных цветов, по одной вершине каждого цвета? Две раскраски считаются одинаковыми, если одну из них можно перевести в другую поворотом куба.

4. Случайный вектор  $\zeta = (\xi, \eta)$  распределён равномерно в квадрате  $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$ .

а) Найдите условную плотность случайной величины  $\eta$  при условии  $\xi = x$  и постройте её график.

б) Вычислите условное математическое ожидание  $E(\eta \mid \xi = x)$  и условную дисперсию  $D(\eta \mid \xi = x)$ .

в) Исследуйте  $\xi$  и  $\eta$  на независимость.

5. Найдите максимум функции при заданных ограничениях:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = \min\{3x_1 + x_2, 4x_2 + x_1\} \rightarrow \max \\ (x_1 + 1)(x_2 + 2) \leq 8, \\ (x_1 - 1)(x_2 + 3) \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6. Даны матрица  $A$  размера  $5 \times 5$  с действительными коэффициентами и 5 векторов  $v_1, \dots, v_5$ , образующих базис в  $\mathbb{R}^5$ . Известно, что при добавлении к  $A$  в качестве 6-го столбца любого из векторов  $v_1, v_2, v_3$  ранг  $A$  не меняется, а при добавлении  $v_4$  или  $v_5$  — меняется. Чему может быть равен ранг  $A$ ?

7. В зависимости от значений действительных параметров  $a$  и  $b$  найдите экстремумы функции

$$f(x, y, z) = ax^2 + 2xy - 2axz + y^2 + 4yz + 2abz^2.$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3, & = x_0 x_1 \\ -5x_1 - 6x_2 + x_3, & = x_0 x_2 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = x_0 x_3 \end{cases}$$

относительно неизвестных действительных  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

9. Альтернативы  $a, b, c, d$  и  $e$  упорядочены по двум критериям  $K_1$  и  $K_2$ . Рассмотрим отношение  $P: xPy$ , если  $x$  предпочтительнее  $y$  хотя бы по одному критерию.

а) Пусть  $K_1 = a > b > c > d > e$ ,  $K_2 = b > d > e > c > a$ . Будет ли  $P$  частичным порядком?

б) Общий случай. При каких условиях на  $K_1$  и  $K_2$  отношение  $P$  будет частичным порядком? Можно считать  $K_1$  и  $K_2$  линейными порядками.

10. В таблице представлены данные по росту и весу 5 студентов магистратуры отделения ПМИ.

Рост, см	175	179	181	184	185
Вес, кг	75	80	73	82	85

а) Предположив, что рост студентов распределен по нормальному закону с дисперсией  $16 \text{ см}^2$ , проверьте гипотезу о том, что средний рост студента ПМИ равен 180 см.

б) Рассчитайте выборочный коэффициент корреляции для показателей роста и веса. Сделайте выводы о силе, форме и направлении зависимости между случайными величинами.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Каждая задача оценивается в 20 баллов. В зачет идут 5 лучших решений.

Темы олимпиадных заданий соответствуют программе вступительных экзаменов по специальности, которую можно найти на сайте НИУ ВШЭ. Ниже — краткий список тем.

1. Линейная алгебра
2. Математический анализ
3. Дифференциальные уравнения
4. Теория вероятностей
5. Математическая статистика
6. Множества, функции, отношения
7. Математическая логика
8. Теория графов

## Литература

1. Ильин В.А. Линейная алгебра.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1,2.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, тт. 1-3.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Под редакцией Б.П. Демидовича.

Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2014 г.

6. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
7. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.
9. Крамер Г. Математические методы статистики.
10. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика.
11. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера.
12. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов.
13. Оре О. Теория графов.