

1. Корни уравнения $x^2 + mx + n = 0$ являются целыми числами, и $m + n = 14$. Найдите m, n .

Решение. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$ – корни уравнения. Тогда по формулам Виета $m = -x_1 - x_2$, $n = x_1 x_2$. Отсюда $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 14 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 15$. Осталось рассмотреть варианты разложения числа 15 в произведение целых множителей: $15 = 15 \cdot 1 = (-1) \cdot (-15) = 5 \cdot 3 = (-5) \cdot (-3)$. По найденным x_1, x_2 определяем m, n .

Ответ: $\begin{cases} m = -18 \\ n = 32 \end{cases}; \begin{cases} m = -10 \\ n = 24 \end{cases}; \begin{cases} m = 14 \\ n = 0 \end{cases}; \begin{cases} m = 6 \\ n = 8 \end{cases}$.

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Если найдена часть решений – 6 баллов. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

2. Найдите, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} |x - y| + |x + y| = 6 \\ |x - 2| + |y| = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Решение. Из второго уравнения следует, что $a > 0$. Изобразим на координатной плоскости xOy все точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям системы. Первому уравнению соответствует квадрат со сторонами, параллельными координатным осям. Центр этого квадрата совпадает с началом координат, а длины сторон равны 6 (см. рис. 1). Второму уравнению соответствует квадрат со сторонами, параллельными биссектрисам координатных углов. Центр этого квадрата находится в точке $(2; 0)$, а две вершины, лежащие на оси абсцисс, находятся в точках $(2 - a; 0), (2 + a; 0)$ (см. рис. 1). Число решений системы равно количеству точек пересечения этих двух квадратов. Три точки пересечения – только в случае $a = 5$ (см. рис. 2).

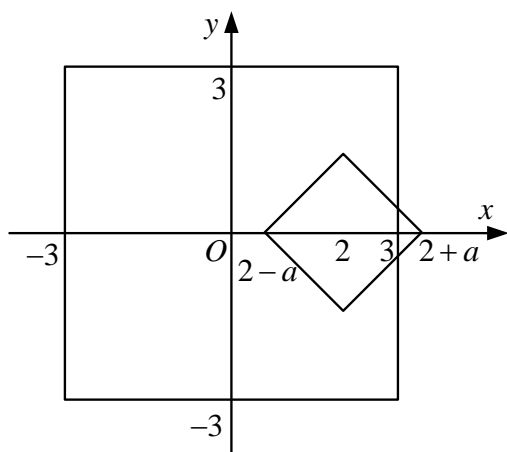


Рис. 1

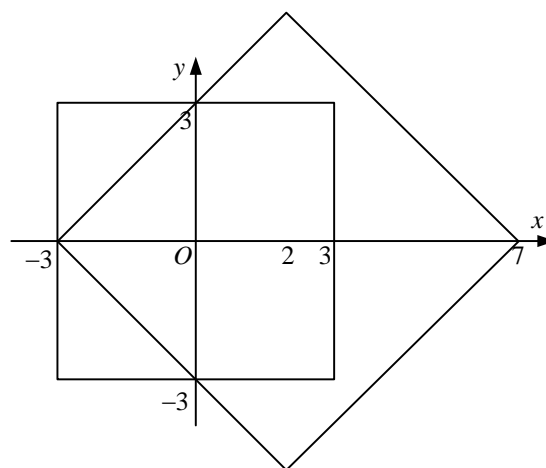


Рис. 2

Ответ: $a = 5$

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 25. Если найдены области, задаваемые каждым из уравнений системы, – по 5 баллов. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

3. Траектория движения точки по координатной плоскости описывается уравнением

$$y = \frac{x^2 + Ax + B}{\sqrt{1-x}}$$

Траектория зависит от двух параметров A и B . Напишите программу, которая по введённым значениям параметров A и B определяет, сколько раз точка пересечёт ось абсцисс. Если это количество бесконечно, то выведите отрицательное число -1 .

Пример.

Вход	Выход
4.5 5	2

Решение. Сначала решим математическую задачу: найдём число решений уравнения

$$\frac{x^2 + Ax + B}{\sqrt{1-x}} = 0$$

в зависимости от значений параметров A и B . Подкоренное выражение положительно, поэтому $x < 1$. Итак, нужно найти число решений квадратного уравнения $x^2 + Ax + B = 0$, удовлетворяющих условию $x < 1$. Решим эту задачу графическим способом.

1) Уравнение $x^2 + Ax + B = 0$ имеет два различных корня, удовлетворяющих условию $x < 1$, если парабола – график функции $y = x^2 + Ax + B$ – расположена следующим образом (см. рис. 3)

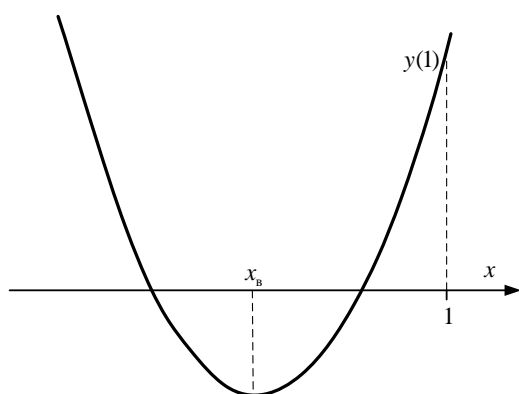


Рис. 3

Эта ситуация описывается следующим набором условий:

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_B < 1 \\ y(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 4B > 0 \\ -\frac{A}{2} < 1 \\ 1 + A + B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B < \frac{A^2}{4} \\ A > -2 \\ B > -A - 1 \end{cases}$$

2) Уравнение $x^2 + Ax + B = 0$ имеет один корень, удовлетворяющий условию $x < 1$, если парабола – график функции $y = x^2 + Ax + B$ – расположена одним из трёх способов (см. рис. 4, 5, 6)

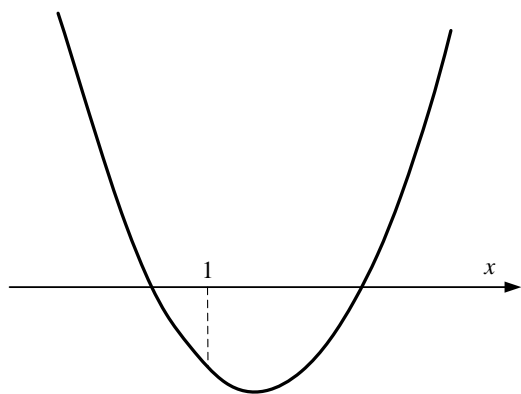


Рис. 4

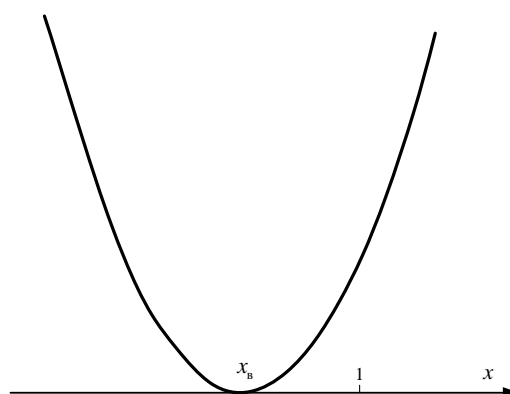


Рис. 5

Первый вариант (рис. 4) отвечает условию $y(1) < 0 \Leftrightarrow 1 + A + B < 0 \Leftrightarrow B < -A - 1$.

Второй вариант (рис. 5) описывается условиями:

$$\begin{cases} D = 0 \\ x_b < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 4B = 0 \\ -\frac{A}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{A^2}{4} \\ A > -2 \end{cases}$$

Третий вариант (рис.6) описывается условиями:

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ x_b < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + 1 = 0 \\ -\frac{A}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A - 1 \\ A > -2 \end{cases}$$

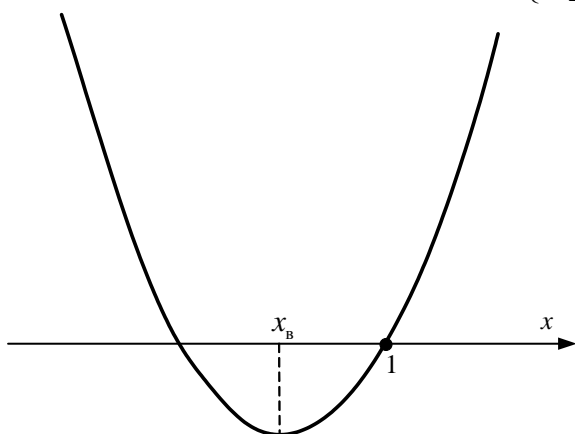


Рис. 6

3) Во всех остальных случаях уравнение $x^2 + Ax + B = 0$ не имеет решений, удовлетворяющих условию $x < 1$, поэтому точка ни разу (ноль) не пересечёт ось абсцисс.

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 25. Для проверки программы использовались 8 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	-1 -2	1	3
2	2 1	1	3
3	-2 1	0	3
4	-6 9	0	3
5	5 6	2	3
6	-5 6	0	3
7	1 1	0	3
8	1 -2	1	4

4. Берётся натуральное десятичное число N ($0 < N < 256$), например 201, и в ячейку памяти вычислительной машины записывается его двоичное представление: 11001001 (размер ячейки – один байт). Над содержимым ячейки выполняется преобразование: циклический сдвиг влево на одну позицию. Все цифры двоичного числа сдвигаются влево на одну позицию, при этом старший бит переходит в младший: 10010011. Этой двоичной записи соответствует десятичное число 147. Преобразование повторяется восемь раз. Напишите программу, которая по введённому натуральному десятичному числу N ($0 < N < 256$) вычисляет наибольшее из десятичных чисел, полученных в процессе преобразований.

Пример.

Вход	Выход
201	228
11	194

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 35. Для проверки программы использовались 7 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	0	0	5
2	255	255	5
3	1	128	5
4	85	170	5
5	127	254	5
6	129	192	5
7	3	192	5