1. В многочлене $\left(x^2+x+1\right)^6$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Найдите коэффициент при x^4.

Решение. Многочлен $\left(x^2+x+1\right)^6$ равен произведению шести многочленов x^2+x+1. При этом слагаемое x^4 получается в следующих двух случаях: 1) из двух многочленов берутся слагаемые x^2, а из оставшихся четырёх многочленов берутся слагаемые 1 – всего таких слагаемых $\mathrm{C}_6^2=15$; 2) из одного многочлена берётся слагаемое x^2, из двух многочленов берутся слагаемые x, а из оставшихся трёх берутся слагаемые 1 – всего таких слагаемых $\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_5^2=60$; 3) из четырёх многочленов берутся слагаемые x, а из оставшихся двух многочленов берутся слагаемые 1 – всего таких слагаемых $\mathrm{C}_6^4=15$.

Получаем коэффициент при x^4: $15+60+15=90$.

Ответ: 90

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 10. Если ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – 8 баллов. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

2. Дан прямоугольник $ABCD\ (AB=6;\ BC=8)$. На сторонах BC, CD, AD, AB взяты точки P, Q, R, T соответственно, так, что $BP=3$. Найдите наименьшее возможное значение периметра четырёхугольника $PQRT$.

Решение. Изобразим на плоскости развёртку четырёхугольника $PQRT$ (см. рис. 1).

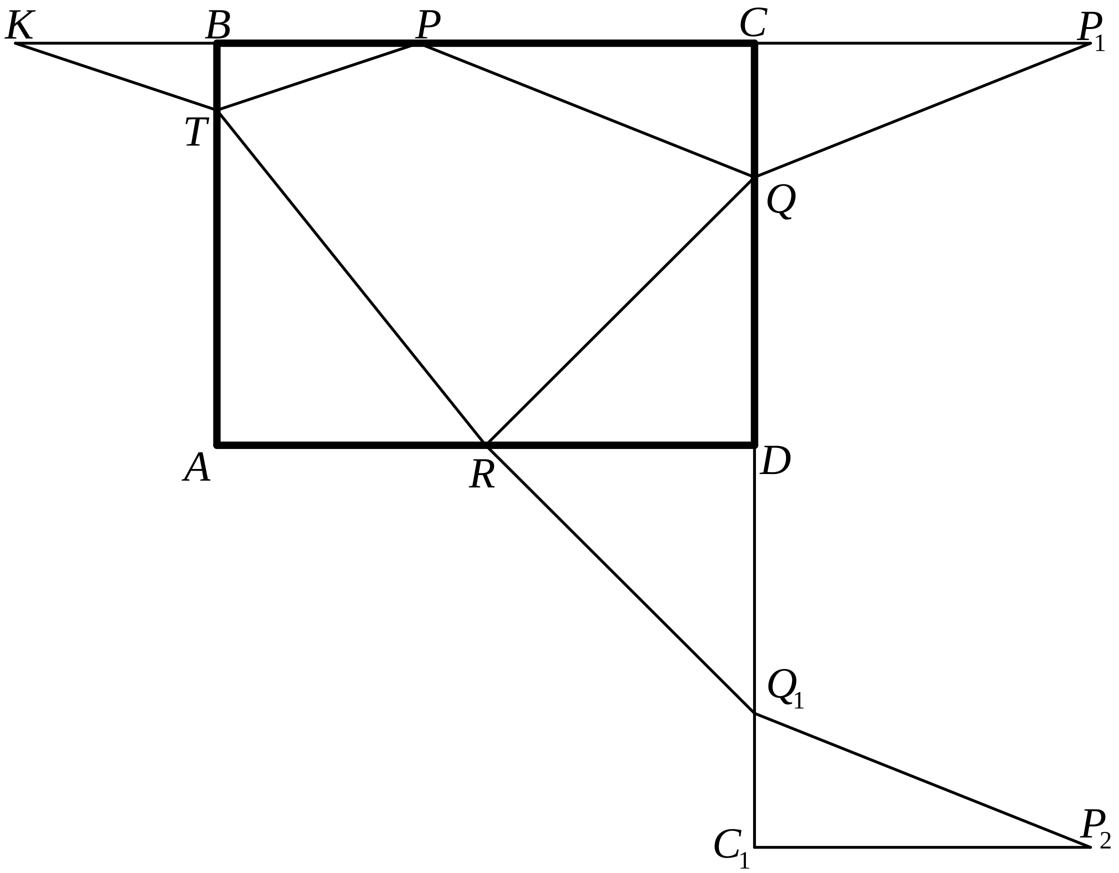

Рис. 1

Отложим $KB=BP=3, P_1C=CP=5, DQ_1=DQ, Q_1C_1=QC, C_1P_2=CP_1$. Тогда $TP=KT$, $PQ=QP_1=Q_1P_2, QR=RQ_1$. Отсюда следует. что периметр четырёхугольника $PQRT$ равен длине ломаной линии $KTRQ_1P_2$. Наименьшая длина этой ломаной равна длине отрезка $KP_2 = \sqrt{KP_1^2 + P_1P_2^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.

Ответ: 20

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

3. Найдите, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} |x+y|+|x-y| = 8 \\ x^2 - 2ax + y^2 = 8a^2 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Решение. Изобразим на координатной плоскости xOy все точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям системы. Первому уравнению соответствует квадрат со сторонами, параллельными координатным осям. Центр этого квадрата совпадает с началом координат, а длины сторон равны 8 (см. рис. 2). Представим второе уравнение системы в виде: $(x-a)^2 + y^2 = \left(3|a|\right)^2$. Это окружность радиуса $3|a|$ с центром в точке $(a; 0)$. Число решений системы равно количеству точек пересечения квадрата и окружности. Три точки пересечения – только в случае $a = \pm 2$ (см. рис. 3).

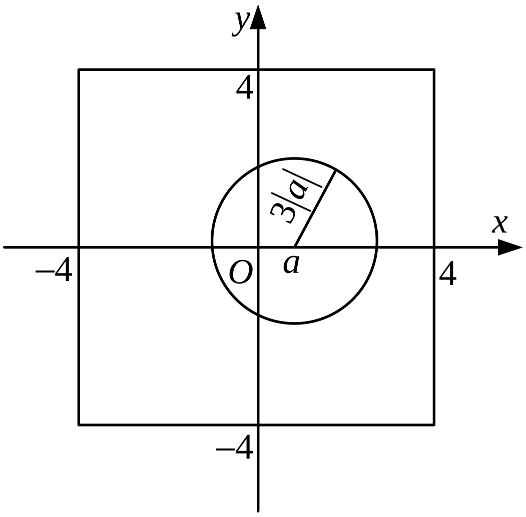

Рис. 2

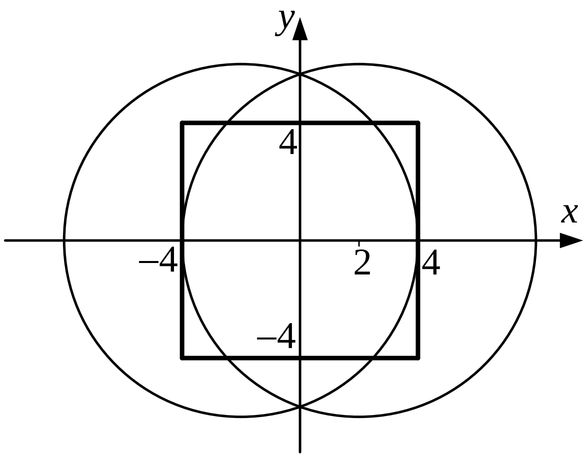

Рис. 3

Ответ: $a = \pm 2$

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Если найдены области, задаваемые каждым из уравнений системы, – по 5 баллов. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

4. По координатной плоскости движутся две точки. Траектория первой точки описывается уравнением $y = \sqrt{x - A}$, а второй точки – уравнением $y = x - B$. Траектории зависят от параметров A и B. Напишите программу, которая по введённым значениям параметров A и B определяет, сколько раз пересекаются траектории этих точек. Если количество пересечений бесконечно, то ответом является отрицательное число –1.

Пример.

Вход	Выход
1.0 0.84	2

Решение. Сначала решим математическую задачу: найдём число решений уравнения

$$\sqrt{x - A} = x - B \qquad (1)$$

в зависимости от значений параметров A и B. Сделаем замену $t = \sqrt{x-A} \geq 0$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$t^2 - t + A - B = 0 \qquad (2)$$

Каждому корню $t \geq 0$ уравнения (2) соответствует корень уравнения (1). Значит, число решений уравнения (1) равно числу неотрицательных корней квадратного уравнения (2). Рассмотрим следующие случаи.

1) $D < 0 \Leftrightarrow B < A - \frac{1}{4}$. Тогда уравнение (2) и, соответственно, уравнение (1) не имеет решений.

2) $D = 0 \Leftrightarrow B = A - \frac{1}{4}$. Тогда $t = \frac{1}{2}$ – единственный корень уравнения (2), и уравнение (1) имеет одно решение.

3) $D > 0 \Leftrightarrow B > A - \frac{1}{4}$. Найдём t_1, t_2 – корни уравнения (2). Заметим, что $t_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{B - A + \frac{1}{4}}$ – положительный корень. Пусть $t_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{B - A + \frac{1}{4}} \geq 0 \Rightarrow A \geq B$. Значит, если $A - \frac{1}{4} < B \leq A$, то уравнение (2) имеет два неотрицательных корня, следовательно, уравнение (1) имеет два корня. Пусть теперь $t_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{B - A + \frac{1}{4}} < 0 \Rightarrow A < B$. Значит, если $A < B$, то уравнение (2) имеет один неотрицательный корень, следовательно, уравнение (1) имеет только одно решение.

В итоге имеем:

1) Уравнение (1) не имеет решений $\Leftrightarrow B < A - \frac{1}{4}$.

2) Уравнение (1) имеет одно решение $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = A - \frac{1}{4} \\ A < B \end{array}\right.$.

3) Уравнение (1) имеет два решения $\Leftrightarrow A - \frac{1}{4} < B \leq A$.

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 10. Задача оценивалась по результатам прогона тестов. Для проверки программы использовались 5 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	1 1	2	2
2	3 2	0	2
3	2 6	1	2
4	5 4,8	2	2
5	2,5 2,25	1	2

5. Напишите программу, которая по введённому натуральному числу N ($N \leq 500$) выдаёт наименьшее число M, произведение цифр которого (в десятичной записи) равно N, или 0, если такого числа M не существует.

Пример.

Вход	Выход
12	26
13	0

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Задача оценивалась по результатам прогона тестов. Для проверки программы использовались 5 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	30	56	3
2	34	0	3
3	216	389	3
4	343	777	3
5	500	4555	3

6. При подготовке космического корабля к полёту требуется перевести из института в ангар большое количество грузов, в том числе и дорогостоящие приборы. Для этих целей выделен контейнер размером L×W×H, где L, W и H – длина, ширина и высота контейнера в метрах (величины целочисленные). Имеется N одинаковых коробок размером X×Y×Z, где Z – это высота коробки, а X и Y – размеры её прямоугольного дна в метрах (все значения целочисленные). Все коробки маркированы знаком, запрещающим переворачивать коробки кверху дном или ставить коробки на бок. Разрешено ставить коробки друг на друга. Напишите программу, которая будет вычислять минимальное количество «этажей» коробок в контейнере. Если все коробки не поместятся в один контейнер, то вывести 0.

Порядок ввода:
в первой строке размеры контейнера L W H;
во второй строке количество коробок N;
в третьей строке размеры коробок X Y Z.

Вход	Выход
10 8 4 11 3 4 1	2

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Задача оценивалась по результатам прогона тестов. Для проверки программы использовались 5 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	13 9 5 10 4 5 2	2	3
2	12 8 11 18 3 5 2	3	3
3	10 6 5 10 5 3 1	3	3
4	12 6 4 6 4 3 3	1	3
5	12 6 4 13 4 3 2	0	3

7. Луноход перемещается по прямой линии, вдоль которой от точки старта проложена ось OX. Луноход пересекает кратеры, имеющие форму кругов. Для каждого кратера луноход фиксирует x-координату центра кратера Xi и длину хорды Di – отрезок линии пересечения трассы лунохода и кратера. Величина Di положительна, т.е. луноход не распознаёт кратеры, граница которых только касается трассы. Сопоставим каждой точке трассы её «кратность» – количество кратеров, которым принадлежит эта точка. Например, если точка касания двух кратеров лежит на трассе лунохода (и другим кратерам эта точка не принадлежит), то «кратность» этой точки равна двум. Накопленная информация передается на Землю в следующем формате: N – количество кратеров, определённых за время движения ($0 < N \le 100$), а далее N строк, в каждой строке два вещественных числа Xi и Di, разделённые пробелом. Написать программу, которая по полученным от лунохода данным вычисляет максимальную «кратность» точек трассы лунохода.

Пример.

Вход	Выход
6 1 1 9 2 3.0 4 3.5 1 6 2 3 1	3
3 20 1 2 6 8 2	1

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 20. Задача оценивалась по результатам прогона тестов. Для проверки программы использовались 5 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	6 22 8 5 6 3 4 11 8 15 10 12 2	3	4
2	2 13 8 18 6	2	4
3	5 23 22 11 8 20 10 6 8 10 18	4	4
4	3 10 4 5 5 20 1	1	4
5	100 78 2 76 6 50 3 55 5 38 7 90 11 86 7 66 3	11	4

	61 10 76 6 61 4 71 2 42 4 47 7 72 7 63 10 64 7 77 5 32 4 30 1 66 2 17 8 29 3 30 2 20 3 64 7 66 11 11 5 109 7 89 11 30 2 87 6 16 3 15 9 53 2 82 7 18 9 64 1 84 9 15 8 83 6 42 3 68 1 49 1 81 9 101 2 27 9 99 7 91 8 37 7 57 7 90 10 23 9 61 7 17 3 76 7		