Направление «Математические методы анализа экономики»

Профиль:

Академическая экономика	**КОД – 220**
Прикладная экономика	**КОД - 221**
Статистический анализ экономических и социальных процессов	**КОД - 222**

Задание состоит из 10 задач. Время выполнения — 180 минут.

1. Найдите предел

$$\lim_{x\to 2014-0}(2014-x)^{\cos\frac{\pi(2015-x)}{2}}$$

2. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора $(x-2014)^2\frac{d^2}{dx^2}$, действующего в пространстве многочленов степени не выше 4.

3. Исследуйте на экстремумы функцию

$$F(x,y)=x^2y+3y^2x+3y^3-8x-25y$$

4. Для каждого значения параметра a исследуйте функцию

$$Q(x,y;a)=\frac{(x+2y)^2-4a(x+a)-x^2}{y-a},$$

на условные экстремумы при ограничении $F(x,y;a)=x^2+y^2-a^2=0$.

5. Задано дифференциальное уравнение

$$y'''+5y''+11y'+15y=15x+56$$

   (a) Найдите общее решение дифференциального уравнения

   (b) Найдите асимптоту при $x\to+\infty$ тех решений, у которых асимптота существует

6. Васе нравятся Маша и Алёна, поэтому он ходит на лекции, чтобы пообщаться с ними. Вероятность застать Васю на лекциях равна 0.1, если девушек нет; 0.5 — если обе девушки пришли на лекции; 0.3 — если пришла только Маша и 0.2 — если пришла только Алёна. Маша и Алёна посещают лекции независимо друг от друга с вероятностями 0.6 и 0.7 соответственно.
   (a) Найдите вероятность того, что на лекциях будет присутствовать ровно одна из девушек
   (b) Найдите вероятность того, что на лекциях присутствуют все трое
   (c) Найдите вероятность того, что на лекциях присутствует Алёна, если на лекциях присутствует Вася
   (d) Найдите вероятность того, что на лекциях присутствует Вася, если пришла ровно одна из девушек

7. Совместная функция плотности случайных величин X и Y имеет вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{3}{2}y^2, \text{ если } x \in [0;1],\ y \in [0;1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

   (a) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, дисперсию $\mathrm{Var}(X)$
   (b) Найдите функцию плотности величины X
   (c) Найдите вероятности $\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2})$ и $\mathbb{P}(Y > 2X)$.
   (d) Найдите константу c, если $g(x,y) = cxf(x,y)$ — это совместная функция плотности для некоторой пары случайных величин

8. В случайной выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ величины X_i независимы и принимают значения 0 и 1, вероятность события $\{X_i = 1\}$ обозначим p. Для проверки гипотезы H_0: $p = 1$ против альтернативы H_a: $p < 1$ используется критерий: отвергать H_0, если $\sum_{i=1}^{n} X_i < n$.
   (a) Предположим, что на самом деле $p = 1$. С какой вероятностью основная гипотеза будет отвергнута?
   (b) Пусть $0 < p < 1$. Выпишите мощность критерия как функцию от n и p.

9. Известно, что объём порции кофе, приготовленной кофейным аппаратом, имеет нормальное распределение со стандартным отклонением 2 мл и математическим ожиданием, которое устанавливает производитель аппарата. Любительница кофе Соня не понимает, какой средний объём порции установлен на её аппарате, и решает приготовить 9 порций кофе, средний объём которых оказывается равен $\bar{X} = 51.8$ мл.

   (a) Рассчитайте 90% доверительный интервал для математического ожидания объёма.

   (b) Предположим, что Соня решает пользоваться доверительным интервалом вида $(\bar{X} - 2; \bar{X} + 2)$.

   Какой доверительной вероятности он соответствует?

10. Менеджер Петров планирует купить подержанный автомобиль и накопил для этого некоторую сумму — 1000 у.е. Он выбрал тип автомобиля: производителя, модель и комплектацию. В качестве основного параметра для принятия решения он рассматривает пробег (переменная «Run») в тысячах километров. Петров собрал данные о ценах на 100 автомобилей выбранного типа в единицах у.е. с различным пробегом и решил для анализа своих возможностей воспользоваться линейной регрессией $Price_t = \beta_1 + \beta_2 Run_t + v_t$. Предположим, что все предпосылки классической нормальной регрессионной модели выполнены. Результаты оценивания модели по имеющимся у Петрова данным:

   - оценки значений параметров, $\hat{\beta}_1 = 2000$, $\hat{\beta}_2 = -2$
   - оценка ковариационной матрицы оценок значений параметров, $\hat{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
   - оценка дисперсии случайной составляющей $\hat{\sigma}^2 = 150$.

   (a) С вероятностью ошибки первого рода 5% проверьте гипотезу менеджера о том, что за каждую тысячу километров пробега автомобиль теряет в цене не две, а две с половиной у.е.

   (b) Каков минимальный пробег автомобиля выбранного типа, начиная с которого Петрову хватит денег на покупку с вероятностью 97.5%?

Справочная информация:

Если $F()$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины, то $F(1) \approx 0.841$, $F(1.282) \approx 0.9$, $F(1.645) \approx 0.95$, $F(1.96) \approx 0.975$, $F(2.241) \approx 0.9875$, $F(3) \approx 0.9987$.

При необходимости можно использовать линейную интерполяцию для нахождения нужных квантилей.